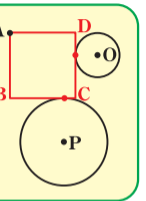


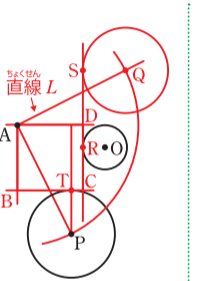
点Aと、中心がOの円O、中心がPの円Pが、図のように与えられています。このとき、直線BCが円Pと接し、直線CDが円Oと接するような正方形ABCDを、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



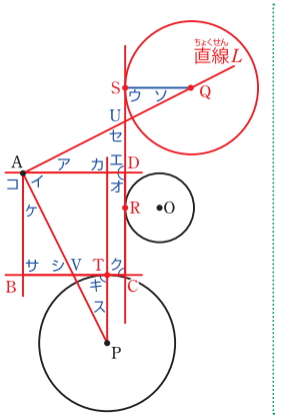
描き方 本文の記事のように、点Aを通りAPと垂直な直線Lと、Aを中心とし半径APの円Aを描きます。直線Lと円Aとの2交点のうちの1つを図のようにQとします。Qを中心とし、半径が円Pと同じ円Qを描き、**問題1**のように、円Oとの接点がR、円Qとの接点がSである共通接線RSを、図のように描きます。点Aを通りRSと垂直な直線を描き、RSとの交点をDとします。点Pを通りADと垂直な直線を描き、円Pとの2交点のうちの1つを、図のようにTとします。点Tを通りPTと垂直な直線を描き、

直線RSとの交点をCとします。点Aを通りADと垂直な直線を描き、直線CTとの交点をBとします。すると、この四角形ABCDが求める正方形ABCDになっています。

証明 図のように、点U、Vと角Aからソをおきます。図の描き方から、角ア+角イ=90度…①、AP=AQ…②、QS=PT…③、RSは円Qと円Oの接線…④、角エ=角オ=90度…⑤、角カ=90度…⑥、角キ=90度…⑦、角コ=角イ+角ケ=90度…⑧です。「ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である」ことから、④より、角ウ=90度…⑨です。⑤⑨より、角エ=角ウ、⑥⑧より、角カ=角イ+角ケなので、「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、ADとSQは平行…⑩、ABとPTは平行…⑪です。「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、⑩より、角ア=角ソ…⑫、



⑪より、角ケ=角ス…⑬、角サ=角キ=90度(⑦より)…⑭です。△QSUと△PTVにおいて、①⑧より、角ア+角イ=角イ+角ケなので、角ア=角ケ…⑮、よって、⑫⑬⑮より、角ソ=角ス…⑯です。また、⑦⑨より、角ウ=角キ…⑰なので、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、③⑯⑰より、△QSUと△PTVはぴったり重なります。よって、QU=PV…⑱です。次に、△ADUと△ABVにおいて、⑤⑭より、角サ=角エなので、⑮と合わせて、「三角形の内角の和は180度である」ことから、角セ=180度-角エ-角ア=180度-角サ-角ケ=角シ…⑲です。また、②⑱より、AU=AQ-



QU=AP-PV=AV…⑳なので、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、⑮⑲⑳より、△ADUと△ABVはぴったり重なります。よって、AD=AB…㉑です。「四角形の内角の和は360度である」ことと、⑤⑧⑭より、角ク=360度-(角イ+角ケ)-角オ-角サ=360度-90度-90度-90度=90度、よって、(角イ+角ケ)=角サ=角ク=角オ=90度…㉒です。また、⑧⑭より、角コ=角サ、⑤⑧より、角エ=角イ+角ケなので、「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、ADとBCは平行…㉓、ABとDCは平行…㉔です。㉓㉔より、ABCDは平行四辺形なので、「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ことから、AB=CD…㉕、AD=BC…㉖です。㉑㉕㉖より、AB=BC=CD=DA…㉗です。「ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である」ことから、⑦より、BCは円Pの接線…㉘です。④㉒㉗㉘より、四角形ABCDは、BCは円Pと接し、CDは円Oと接している正方形と分かるので、図が正しく描けていることが証明できました。