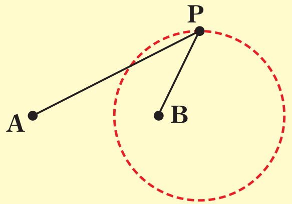
数学の世界をのぞいてみよう!

チャレンジ問題（解答・解説）

「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、7面をご覧ください。

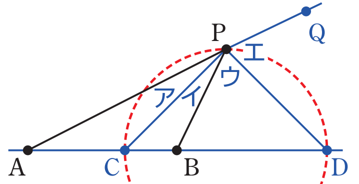
企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

２定点A、Bが与えられています。点Pが、AP：PBが一定の比m:n（m＞n）になるように動くと、点Pの軌跡がある円周になることを証明してみましょう。



証明

線分AB内にAC：CB＝m：n…①となる点Cをとり、ABのBの方への延長線上にAD：DB＝m：n…②となる点Dをとります。



まず、点Pが2点C、Dと一致しない場合を考えます。図のように、角をアからエとおき、APのPの方への延長線上に点Qをとります。

本文の記事で紹介したように、「△APBの辺AB上に点CをAP：PB＝AC：CBになるようにとるとき、PCはPAとPBのなす角の二等分線になる」ことから、①より、角ア＝角イ…③です。

また、「△APBの辺APのPの方への延長線上に点Qをとり、辺ABのBの方への延長線上に点DをAP:PB＝AD:DBになるようにとるとき、PDはPBとPQのなす角の二等分線になる」ことから、②より、角ウ＝角エ…④です。

「３点A、P、Qがこの順番で一直線上にあるならば、PAとPQのなす角は180度である」ことから、角ア＋角イ＋角ウ＋角エ＝180度…⑤です。

③④⑤より、2×角イ＋2×角ウ＝180度なので、角イ＋角ウ＝180度÷2＝90度です。

よって、問題１より、点Pの軌跡は点C、Dを除くCDを直径とする円とわかります。

また、①②より、点Pは2点C、Dと一致してもよいので、結局、点Pの軌跡は、CDを直径とする円全体になることが証明できました。