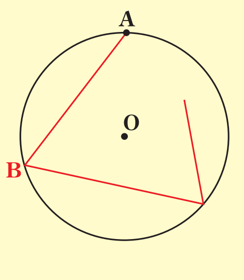
チャレンジ問題（解答・解説）

「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、7面をご覧ください。

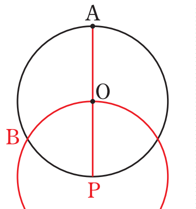
企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

中心Oの円Oと円周上の点Aが与えられているとき、Aを出発点として円内を進んでいく光が円周で2回反射してまた点Aに戻ってくるような光の軌跡を作図したい。1回目に反射する点Bを1つコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



描き方

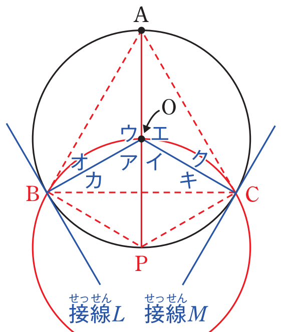
直線AOを描き円Oとの2つの交点のうち、Aでない方をPとします。Pを中心とし半径OPの円Pを描き、円Oと円Pの交点のうちの1つをBとすると、Bが求める点になっています。



証明

図のように点C、角アから角クをおき、点B、Cにおける円の接線をL、Mとします。図の描き方から、OA＝OB＝OC＝OP＝PB＝PC …① です。①より、△OBPは正三角形 …②、△OCPは正三角形 …③ です。「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、正三角形の3つの角は等しく、「三角形の内角の和は180度」であることから、正三角形の1つの角は180度÷3＝60度です。よって、角ア＝角イ＝60度 …④ です。

「3点A、O、Pがこの順番で一直線上にあるならば、OAとOPのなす角は180度」であることから、角ウ＝180度－角ア …⑤、角エ＝180度－角イ …⑥ です。よって、④⑤⑥より、角ウ＝角エ＝角ア＋角イ(＝120度) …⑦ です。



「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、OA＝OB＝OC（①より）と⑦より、△OBAと△OBC、△OCAと△OCBは、頂点がこの順番で対応するようにぴったり重なります。よって、角オ＝角カ …⑧、角キ＝角ク …⑨ です。

「ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である」ことから、接線Lと半径OBは垂直 …⑩、接線Mと半径OCは垂直 …⑪ です。⑧⑩より入射角オと反射角カが等しいので、点Aから点Bに進む光が円周上の点Bで反射すると、点Bから点Cに進んでいきます。⑨⑪より入射角キと反射角クが等しいので、点Bから点Cに進む光が円周上の点Cで反射すると、点Cから点Aに進んでいきます。したがって、図の描き方が正しいことがわかりました。