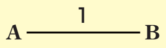
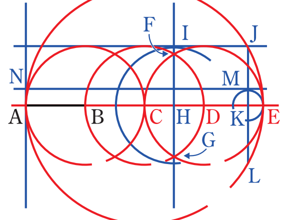
長さが１の線分が与えられているとき、周の長さが８、面積が１の長方形を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

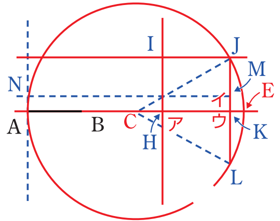


描き方

２点A、Bを通る直線を描き、Bを中心とし半径ABの円を描き直線ABとの２つの交点のうちAではない方をCとします。同様に円を描くことで図のように点D、Eをとります。中心C、半径ABの円Cと中心D、半径ABの円Dの２つの交点をF、Gとし、２点F、Gを通る直線を描きます。直線FGと直線ABの交点をHとおき、Hを中心とし半径ABの円と直線FGの２つの交点のうちの１つをIとします。Iを通り直線AEに平行な直線とCを中心とし半径ACの円を描き、その直線と円の２つの交点のうち１つを図のようにJとします。Jを通り直線IHに平行な直線を描き、その直線と直線AEとの交点をK、その直線とCを中心とし半径ACの円との２つの交点のうちJでない方をLとします。Kを中心とし半径KEの円を描き、直線JLとの２つの交点のうち１つをMとします。Mを通り直線AEと平行な直線とAを通り直線JLと平行な直線を描き、その２本の直線の交点を図のようにNとします。すると、四角形AKMNが求める長方形になっています。



証明



図の描き方からBC＝CD＝DE＝HI＝AB＝１…①、HIJKは平行四辺形…②、AKMNは平行四辺形…③、MK＝EK…④、本文の作図法からFGは線分CDの垂直二等分線なのでIH⊥AE…⑤です。さらに、本文に書いた前回の記事で扱った性質から、AK×EK＝JK×LK…⑥です。図のように角ア、イ、ウをおきます。△CJKと△CLKにおいて、CJ＝CL（半径）…⑦、CK＝CK（共通）…⑧、「２直線が平行であれば、その２直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、②よりHIとJLは平行なので、角ア＝角イ…⑨、⑤⑨より角イ＝角ア＝90度…⑩です。「３点J、K、Lがこの順番に一直線上にあるならば、KJとKLのなす角は180度」から、角イ＋角ウ＝180度なので、⑩を考えると角ウ＝180度－90度＝90度…⑪です。⑩⑪より、角イ＝角ウ＝90度…⑫です。「斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる」ことから、⑦⑧⑫より、△CJKと△CLKはぴったり重なり、JK＝LK…⑬です。「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ことから、②よりHI＝JKなので、①⑬も考えると、LK＝JK＝１…⑭です。よって、④⑥⑭より、AK×MK＝１×１＝１…⑮です。本文の 問題１ から「１つの内角が90度の平行四辺形は長方形」なので、③⑩より、AKMNは長方形…⑯です。⑮⑯より、長方形AKMNの面積は１…⑰です。①④よりAK＋MK＝AK＋EK＝AE＝４AB＝４×１＝４なので、長方形AKMNの周の長さは２（AK＋MK）＝２×４＝８…⑱です。⑰⑱より、図が正しく描けていることが証明できました。