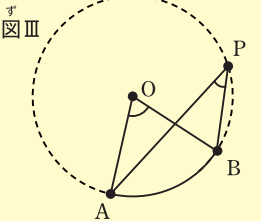
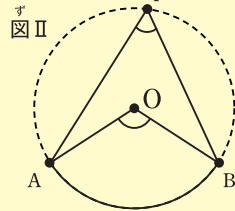


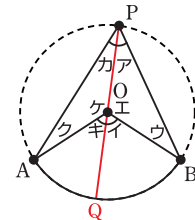


中心Oの円Oに対し、円周上に弧ABがあり、弧AB以外の円周上に点Pがあります。図Ⅱと図ⅢのそれぞれのPAとPBの間の角の場合に、「弧ABの円周角は弧ABの中心角の半分である」ことを証明してみましょう。



証明

まず、図Ⅱの場合を証明をします。図のように、POのOの方への延長線と円周との交点をQとおき、角をア、イ、ウ、エ、カ、キ、ク、ケとおきます。



すると、円の半径より $OB = OP$ なので、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、 $\text{角ア} = \text{角ウ} \dots \text{①}$ です。

「三角形の内角の和は180度」より、 $\text{角ア} + \text{角ウ} = 180\text{度} - \text{角エ} \dots \text{②}$ です。

3点Q、O、Pがこの順番で一直線上にあるならば、OQとOPのなす角は180度より、 $\text{角イ} = 180\text{度} - \text{角エ} \dots \text{③}$ です。

①②③より、 $\text{角イ} = \text{角ア} + \text{角ウ} = \text{角ア} + \text{角ア}$ 、すなわち、 $\text{角ア} = \text{角イ} \div 2 \dots$

④です。

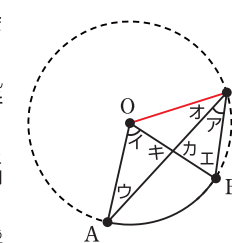
同様に、 $\text{角カ} = \text{角キ} \div 2 \dots \text{⑤}$ も証明できます。④⑤より、 $\text{角ア} + \text{角カ} = (\text{角イ} + \text{角キ}) \div 2$ なので、「弧ABの円周角は弧ABの中心角の半分である」ことが証明できました。

次に、図Ⅲの場合を証明します。図のように、角をア、イ、ウ、エ、オ、カ、キとおきます。

すると、円の半径より $OA = OP$ なので、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、 $\text{角ウ} = \text{角オ} \dots \text{⑥}$ です。

円の半径より $OB = OP$ なので、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、 $\text{角エ} = \text{角ア} + \text{角オ} \dots \text{⑦}$ です。

よって、⑥⑦より、 $\text{角エ} = \text{角ア} + \text{角ウ} \dots \text{⑧}$ です。



また、「三角形の内角の和は180度」より、 $\text{角ア} + \text{角エ} = 180\text{度} - \text{角カ} \dots$ ⑨、 $\text{角イ} + \text{角ウ} = 180\text{度} - \text{角キ} \dots \text{⑩}$ です。ここで、「対頂角は等しい」ので、 $\text{角カ} = \text{角キ} \dots \text{⑪}$ なので、⑨⑩⑪より、 $\text{角ア} + \text{角エ} = \text{角イ} + \text{角ウ} \dots \text{⑫}$ です。

⑧⑫より、 $\text{角ア} + (\text{角ア} + \text{角ウ}) = \text{角イ} + \text{角ウ}$ によって、 $\text{角ア} + \text{角ア} = \text{角イ}$ 、すなわち、 $\text{角ア} = \text{角イ} \div 2$ なので、「弧ABの円周角は弧ABの中心角の半分である」ことが証明できました。

※ **問題1** と **チャレンジ問題** をあわせると、すべての場合で、「弧ABの円周角は弧ABの中心角の半分である」ことが証明できたことになります。またこのことから、点Pの位置によらず、常に円周角の大きさは中心角の半分で一定ことがわかります。