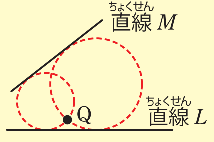
チャレンジ問題〔解答・解説〕

「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、6面をご覧ください。

企画・構成｜科学的教育グループ SEG

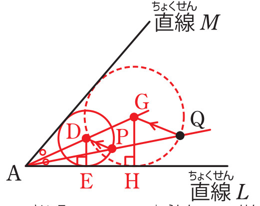
平行でない2直線L、Mと点Qが与えられているとき、点Qを通り2直線L、Mと接する円は図のように2つあります。このうち小さい方の円を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



描き方 まず、直線LとMの交点をAとおき、直線LとMの間に点Qがある角の二等分線を描き、二等分線上に点Dをとります。そして、Dを通り直線Lと垂直な直線を描き、その直線と直線Lの交点をEとし、Dを中心とし半径DEの円Dを描きます。

次に、2点A、Qを通る直線を描き、その直線と円Dの2交点のうちAから遠い方をPとします。そして、Qを通りDPと平行な直線を描き、その直線と角の二等分線ADとの交点をGとします。

さらに、Gを通り直線Lと垂直な直線を描き、その直線と直線Lとの交点をHとします。最後に、Gを中心とし半径GHの円Gを描けば、その円が求める円になります。



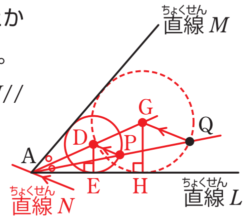
証明 図の描き方から、ADとAEの間の角＝AGとAHの間の角…①、EAとEDの間の角＝HAとHGの間の角…②です。

「二角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、①②より、△ADEと△AGHは相似…③です。

点Aを通りDPと平行な直線Nを描くと、直線N//DP//GQ…④です。

「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」ことから、④より、AD：AG＝AP：AQ…⑤です。

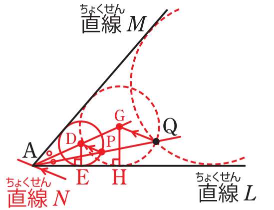
ADとAPの間の角＝AGとAQの間の角…⑥なので、「二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、⑤⑥より、△ADPと△AGQは相似…⑦です。



③より、AD：DE＝AG：GH…⑧、⑦より、AD：DP＝AG：GQ…⑨、円Dの半径より、DE＝DP…⑩なので、⑧⑨⑩より、GH＝GQ…⑪です。

ここで、問題1の円Dと同様に考えると、円Gは直線Lと直線Mの両方に接する円とわかります。

さらに、⑪より、円Gは点Qも通るとわかります。したがって、図を考えて、この円Gが点Qを通り2直線L、Mと接する2円のうちの点Aに近い方、すなわち、2円のうちの小さい方とわかりました。



参考 A、Qを通る直線と円Dの2交点のうち、Aから近い方をPとすると、大きい方の円が描けます。