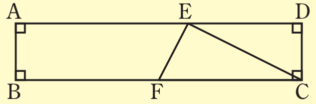
チャレンジ問題〔解答・解説〕

「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、6面をご覧ください。

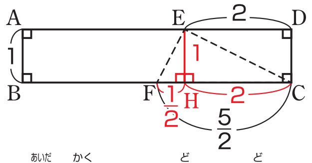
企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

AB＝1、BC＝5の長方形ABCDにおいて、AD上に点EをDE＝2となるようにとり、BCの中点をFとする。このとき、ECとEFの間の角が直角であることを証明してみましょう。



証明 問題の設定から、ABCDは長方形…①、AB＝1…②、BC＝5…③、DE＝2…④、BF＝CF…⑤です。③⑤より、CF＝5÷2＝$\frac{5}{2}$…⑥です。

BC上に点Hを、HEとCFが垂直になる…⑦ようにとります。



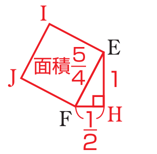
すると、四角形ABHEにおいて、①⑦より、3つの内角が直角なので、「四角形の内角の和は360度である」ことから、残る1つの内角であるEAとEHの間の角は、360度－90度×3＝90度です。

したがって、4つの内角が直角で等しいので、四角形ABHEは長方形です。長方形は平行四辺形でもあるので、「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ことから、EH＝AB…⑧です。

①⑧より、EH＝1…⑨です。

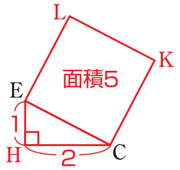
同様に考えて、四角形CDEHも長方形であることが証明できるので、HC＝ED＝2…⑩です。

⑥⑩より、FH＝FC－HC＝$\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$…⑪です。



△EFHの辺EFの上に正方形EIJFをとります。

⑨⑪より、**問題1**の結果を考えると、正方形EIJFの面積＝$\frac{5}{4}$…⑫です。



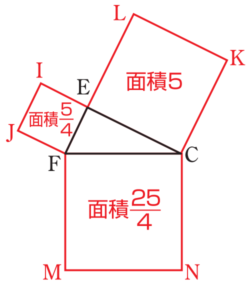
△CEHの辺CEの上に正方形CKLEをとります。

⑨⑩より、**問題1**と同様に考えると、正方形CKLEの面積＝5…⑬となることも証明できます。

△CEFの辺CFの上に正方形CFMNをとると、⑥より、正方形CFMNの面積＝$\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$…⑭です。

$\frac{5}{4}+5=\frac{5+20}{4}=\frac{25}{4}$なので、⑫⑬⑭より、

正方形CFMNの面積＝正方形EIJFの面積＋正方形CKLEの面積…⑮です。



ピタゴラスの定理の逆定理「三角形の二辺の上の2つの正方形の面積の和が残る一辺の上の正方形の面積と等しいならば、はじめの二辺の間の角は直角である」ことから、⑮より、ECとEFの間の角が直角であることが証明できました。