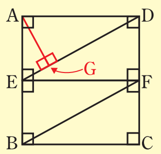
チャレンジ問題〔解答・解説〕

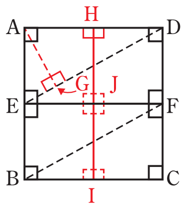
「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、6面をご覧ください。

企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

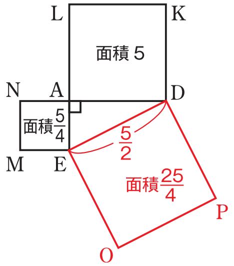
面積5の正方形ABCDにおいて、問題2と同じ設定で点E、Fをとり、さらに、DE上に点Gを AGとDEが垂直になるようにとるとき、AGの長さが1になることを証明してみましょう。



証明 問題2と同じ設定なので、ABCDは面積5の正方形…①、AE=EB…②、ABとEFは垂直であり、問題2の証明から、ADFEとBCFEは長方形です。AD上に点HをAH=HD…③となるようにとり、BC上に点IをADとHIが垂直になるようにとります。すると、問題2の証明と同様に考えて、ABIHとCDHIは長方形とわかります。HIとEFの交点をJとおくと、AEJHとDFJHも長方形とわかります。長方形AEJHにおいて、問題2の証明と同様に考えて、AH=EJ…⑤、AE=HJ…⑥であり、①②③より、AE=AB÷2=AD÷2=AH…⑦なので、⑤⑥⑦より、長方形AEJHの四辺はすべて等しいとわかります。したがって、AEJHは正方形とわかります。同様に考えて、「AEJH、BIJE、CFJI、FDHJは正方形であり、辺の長さは正方形ABCDの辺の長さの半分である」とわかります。よって、AEJH、BIJE、CFJI、FDHJは辺の長さが同じことから面積が等しく正方形ABCDの面積の4分の1とわかります。①より、「AEJH、BIJE、CFJI、FDHJは面積が$\frac{5}{4}$の正方形」…⑧です。



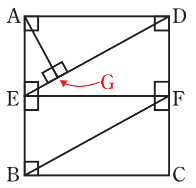
辺AD、AE、DEの上に正方形ADKL、AEMN、DEOPを、右の図のようにくっつけます。正方形ABCDとADKLは辺の長さが同じなので、①より正方形ADKLの面積は5…⑨です。正方形AEJHとAEMNは辺の長さが同じなので、⑧より正方形AEMNの面積は$\frac{5}{4}$…⑩です。



よって、ピタゴラスの定理「直角三角形の直角をはさむ二辺の上の2つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい」より、正方形DEOPの面積は$5+\frac{5}{4}=\frac{20}{4}+\frac{5}{4}=\frac{25}{4}$です。

よって、$\frac{25}{4}=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}$なので、正方形DEOPの一辺の長さは$\frac{5}{2}$…⑪です。

問題2の証明から、△ADE、△FED、△EFB、△CBFはぴったり重なるので、面積が等しいです。よって、△ADEの面積は正方形ABCDの面積の4分の1なので、①を考えて、△ADEの面積は$\frac{5}{4}$…⑫です。問題の設定から、AGとDEは垂直なので、△ADEの面積は「底辺DE×高さAG÷2」…⑬です。



⑪⑫⑬より、$\frac{5}{2}\times AG\div 2=\frac{5}{4}$、すなわち、$\frac{5}{4}\times AG=\frac{5}{4}$なので、AG=1です。

以上から、AGの長さが1になることが証明できました。