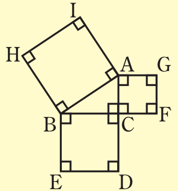
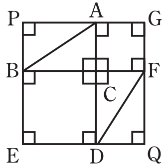
CAとCBの間の角が直角である△ABCの直角をはさむ二辺の上の正方形BCDEと正方形ACFGの面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形ABHIの面積と等しいことを、面積を数値で表す考え方を使わずに、証明してみましょう。



証明 問題1の一辺の長さがAC+BCの正方形PEQGの図において、問題1の証明から、△ABCと△BAPはぴったり重なる…①

△DFQと△FDCはぴったり重なる…②のでした。

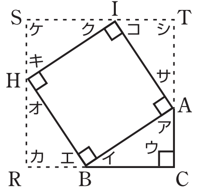
さらに、問題1の証明から、AC=FC、BC=DC、



CAとCBの間の角とCFとCDの間の角が直角で等しいので、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABCと△FDCはぴったり重なる…③とわかります。

よって、①②③より、「一辺の長さがAC+BCの正方形の面積は、正方形BCDEの面積＋正方形ACFGの面積＋△ABCの面積×4と等しい」…④となります。

次に、正方形ABHIの外側に、HR=IS=AT=BC…⑤、BR=HS=IT=AC…⑥、となるように点R、S、Tをとります。



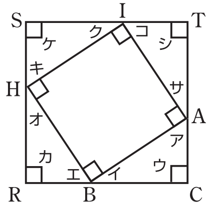
ABHIが正方形よりAB=BH=HI=IAなので、⑤⑥も考えると、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABC、△BHR、△HIS、△IATはぴったり重なる…⑦とわかります。

ここで、図のように角ア、イ、ウ、エ、オ、カ、キ、ク、ケ、コ、サ、シをおくと、⑦より、

角ア＝角エ＝角キ＝角コ…⑧

角イ＝角オ＝角ク＝角サ…⑨

角カ＝角ケ＝角シ＝角ウ＝90度…⑩です。



また、△ABCにおいて、「三角形の内角の和は180度」より、角ア＋角イ＝180度－90度＝90度…⑪です。

⑧⑨⑪より、角イ＋角エ＝角オ＋角キ＝角ク＋角コ＝角サ＋角ア＝90度なので、

BCとBRのなす角＝角イ＋90度＋角エ＝90度＋90度＝180度…⑫

HRとHSのなす角＝角オ＋90度＋角キ＝90度＋90度＝180度…⑬

ISとITのなす角＝角ク＋90度＋角コ＝90度＋90度＝180度 …⑭

ATとACのなす角＝角サ＋90度＋角ア＝90度＋90度＝180度…⑮です。

⑫より、「BCとBRのなす角が180度ならば、3点C、B、Rはこの順に一直線上にある」ことから、点Bは線分CR上にある…⑯とわかります。

同様にして、⑬⑭⑮から、点H、I、Aも線分RS、ST、TC上にある…⑰とわかります。

⑤⑥⑩⑯⑰から、四角形CRSTは、4点A、B、H、Iが辺上にある一辺の長さがAC+BCの正方形であるとわかります。よって、⑦より、

「一辺の長さがAC+BCの正方形の面積は、正方形ABHIの面積＋△ABCの面積×4と等しい」…⑱となります。

④⑱より、正方形BCDEと正方形ACFGの面積の和が正方形ABHIの面積と等しいことが証明できました。