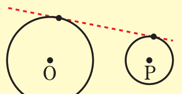
数学の世界をのぞいてみよう!

チャレンジ問題〔解答・解説〕

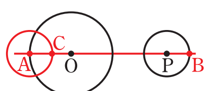
「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、6面をご覧ください。

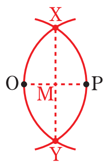
企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

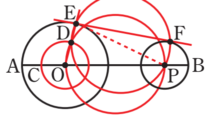
中心がOとPで半径の異なる円Oと円Pが与えられているとき、それら2円の両方に右の図の点線のように接する直線を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



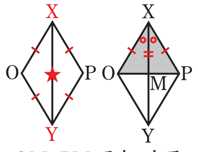
描き方 まず、2点O、Pを通る直線を描き、図のように円O、円Pとの交点をA、Bとします。そして、Aを中心とし半径BPの円を描き、その円と線分AOとの交点をCとします。次に、Oを中心とし半径OPの円とPを中心とし半径OPの円を描き、それら2円の2つの交点をX、Yとします。そして、直線XY(2点X、Yを結ぶ直線)を描き、直線OPとの交点をMとします。その点Mを中心とし半径OMの円を描くと、その円が直径OPの円になります。さらに、Oを中心とし半径OCの円を描き、その円と直径OPの円との2つの交点のうち、OPより上側の点をDとし、線分ODのDの方への延長線と与えられた円Oとの交点をEとします。ここで、直径OPの円を描くのと同様にして直径EPの円を描き、与えられた円Pとの交点のうち、OPより上側の点をFとすると、直線EFが与えられた2円OとPの両方に接する直線になります。







証明 △XOYと△XPYにおいて、図の描き方から、XO=XP(=OP)、YO=YP(=OP)、XY共通なので、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△XOYと△XPYはぴったり重なります。よって、XOとXYの間の角とXPとXYの間の角は等しくなります。すると、△XOMと△XPMにおいて、[XOとXMの間の角]＝[XPとXMの間の角]、XO=XP、XM共通なので、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△XOMと△XPMはぴったり重なります。よって、OM=PMです。すると、Mを中心とし半径MO(=MP)の円は、OPが直径の円になります。



右の図のように角ア、イ、ウ、エ、オ、カをおきます。「円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である」ことより、△OPDは角アが90度、△EFPは角ウが90度の直角三角形です。よって、「3点E、D、Oがこの順で一直線上にあるならば、DEとDOのなす角が180度である」ことから、角イ＝180度－角ア＝90度なので、角イ＝角ウ＝90度…①です。また、図の描き方からED=AC=BP=PFなので、ED=PF…②です。よって、①②とEP=PEより、「直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる」ことから、△PDEと△EFPはぴったり重なります。したがって、角エ＝角オなので、「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、直線EFと直線DPは平行です。よって、「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、角カ＝角イ…③です。よって①③から、角カ＝角ウ＝90度なので、半径OE、半径PFと直線EFは垂直です。よって、「ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である」ことから、直線EFは与えられた2円O、Pと接する直線です。以上で、正しく図が描けていることが証明できました。