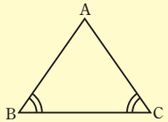
チャレンジ問題（解答・解説）

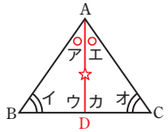
「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、6面をご覧ください。

企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

「△ABCにおいて、BAとBCの間の角とCAとCBの間の角が等しければ、AB＝ACである」ことを、根本原理から証明してください。



証明1 ABとACのなす角の二等分線と辺BCの交点をDとし、図のように、角アからカをおきます。



すると、「三角形の内角の和は180度」と角ア＝角エ、角イ＝角オより、

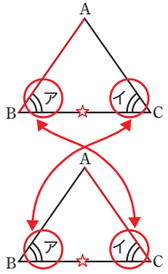
角ウ＝180度－角ア－角イ＝180度－角エ－角オ＝角カになります。

よって、△ABDと△ACDにおいて、AD共通、角ア＝角エ、角ウ＝角カより、「一辺とその両端の角が互いに等しい」ので、△ABDと△ACDはぴったり重なります。したがって、AB=ACです。

証明2 図のように角アとイをおきます。

△ABCを、△ABCと△ACBという2つの三角形と考えると、BC=CB（共通）、角ア＝角イ、角イ＝角アより、「一辺とその両端の角が互いに等しい」ので、△ABCと△ACBはぴったり重なります。

したがって、△ABCの辺ABと△ACBの辺ACはぴったり重なるので、AB=ACです。



証明3 図のように角アとイをおきます。

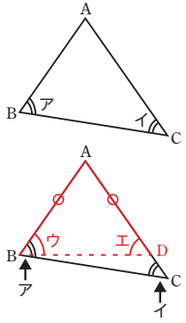
ABよりもACが長いと仮定すると、AB=ADとなる点DがAC上にとれます。ここで、図のように角ウとエをおきます。

すると、△ABDにおいて、「二等辺三角形の底角は等しい」ので、角ウ＝角エです。

図より、角ウは角アより小さいので、『角エは角アより小さい』…① です。

さらに、図のように、△BCDの角イ以外の内角を△、☆とおきます。

「3点A、D、Cがこの順番で一直線上にあるならば、DAとDCのなす角は180度」と「三角形の内角の和は180度」より、

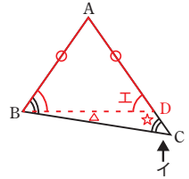


角イ＋角△＝180度－角☆＝角エになります。

よって、『角エは角イより大きい』…② です。

ところが、角ア＝角イなので、①と②は矛盾しています。

したがって、『ABよりもACが長くてはいけない』ことがわかりました。

ACよりもABが長いと仮定しても、同様に考えて、矛盾することが証明できるので、『ACよりもABが長くてはいけない』ことも証明できます。

よって、AB=ACでなくてはいけないとわかりました。