



執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界



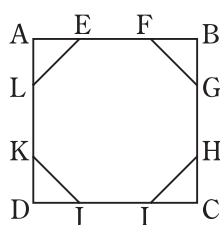
<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world-2/>

ユークリッド
幾何の世界

第19回 正方形と四辺が重なる正八角形を描いてみよう



今回は、正方形が与えられているとき、右の図のように正方形と四辺が重なる正八角形をどう描くかについて考えていきます。そのための準備として、まずは、正方形の対角線の性質を確認してみましょう。

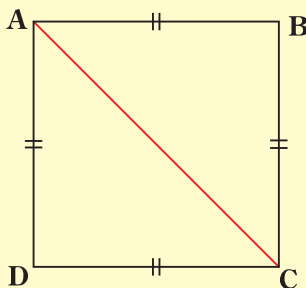


正方形のいろいろな性質

正方形は、四辺の長さがすべて等しく、4つの内角がすべて等しい四角形のことです。チャレンジ問題への準備として、2つの問題を考えておきましょう。

問題 1

正方形ABCDの4つの内角が直角（90度）であることを証明し、さらに、対角線ACは、頂点A、Cにおけるそれぞれの内角を、45度ずつにわけるとを証明してみましょう。

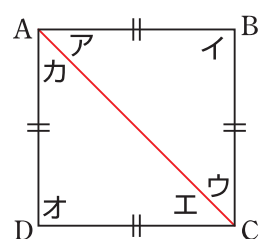


考え方

内角の和と二等辺三角形の性質を思い出すと……。

証明

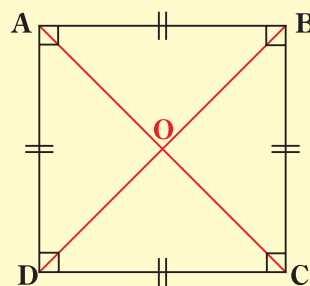
右の図のように、角ア、イ、ウ、エ、オ、カをおきます。「正方形の4つの内角は等しい」ので、角ア+角カ=角イ=角ウ+角エ=角オ……①です。「三角形の内角の和は180度である」ことから、角ア+角イ+角ウ=角エ+角オ+角カ=180度なので、(角ア+角カ)+(角イ+角ウ+角エ)+角オ=180度×2=360度……②です。よって、①②より、角ア+角カ=角イ=角ウ+角エ=角オ=360度÷4=90度……③です。四角形ABCDは正方形より、BA=BC……④です。△ABCにおいて、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、④より、角ア=角ウ……⑤です。「三角形の内角の和は180度で



ある」ことと③⑤より、角ア=角ウ=(180度-角イ)÷2=(180度-90度)÷2=45度とわかります。△ADCでも同様に考えて、角エ=角カ=45度です。以上から、角ア=角カ=45度、角ウ=角エ=45度なので、対角線ACが内角を45度ずつにわけることが証明できました。

問題 2

正方形ABCDの対角線ACとBDの交点をOとします。ACとBDが垂直なことから、OA=OB=OC=ODであることを証明してみましょう。

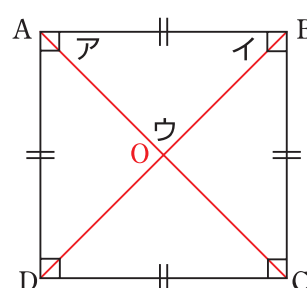


考え方

問題 1 と「三角形の内角の和」、そして、二角が等しい三角形は……。

証明

△OABにおいて、右の図のように角ア、イ、ウをおきます。問題 1 で証明したように、角ア=角イ=45度……①です。「三角形の内角の和は180度である」ことから、角ウ=180度-(角ア+角イ)=180度-45度×2=90度なので、ACとBDは垂直です。「二角が等しければ二等辺三角形である」ことから、OA=OB……②です。よって、△OBC、△OCDでも同様に考えて、OB=OC……③、OC=OD……④です。②③④より、OA=OB=OC=ODであることが証明できました。

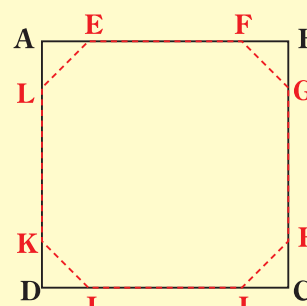


正方形と四辺が重なる正八角形を描いてみよう

さて、いよいよ、正方形と四辺が重なる正八角形（八辺の長さがすべて等しく、8つの内角がすべて等しい八角形）を描いてみたいと思います。今回のチャレンジ問題にするので、がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

正方形ABCDが与えられているとき、下の図のように、その正方形と四辺が重なるような正八角形EFGHIJKLの8つの頂点の位置を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。ただし、定規とコンパスは合計で4回までしか使えないことにします。



考え方

正八角形とは、八辺の長さがすべて等しく、8つの内角がすべて等しい八角形のことです。正方形ABCDの対角線の交点と、正八角形EFGHIJKLの対角線の交点が一致することをうまく使っていきましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

図を描くときの注意

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

根本原理

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形は合同（ぴったり重なる）である。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形は合同である。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である。
- ・対頂角は等しい。
- ・直線LとL上でない点Aが与えられているとき、Aを通りLに平行な直線は1本だけ存在する。
- ・2直線において錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい。
- ・三角形の内角の和は180度である。
- ・三角形の2つの内角の和は、残りの内角の外角と等しい。
- ・ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。