



コンパスと定規で描ける図形の世界



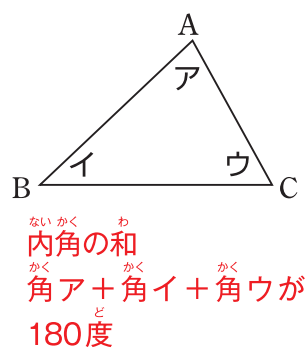
<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>

ユークリッド
幾何の世界

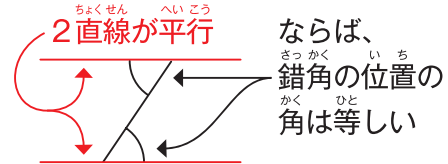
第12回 「三角形の内角の和は180度」を示すには？(その5)

「三角形の内角の和が180度である」ことを証明するにはどうすればよいかを考えていく記事も5回目になりました。

今回は、いよいよ「三角形の内角の和が180度である」ことを証明していきます。おさらいしておく、右の図の三角形ABCにおいて、角ア、イ、ウを内角と言ひ、内角の和が180度であるとは、この角ア+角イ+角ウが180度になるということです。

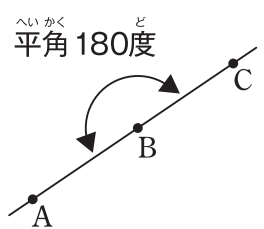


このことを証明するには、三角形の3つの内角を直線上に集めるために、『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』(平行線の性質)という原理が必要になり、前回、この原理をプレイフェアの公理から証明したのでした。



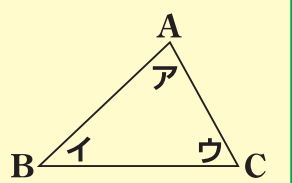
三角形の内角の和は180度

これから「三角形の内角の和が180度である」ことを証明してもらうのですが、180度を証明するためには、「右の図のようなBAとBCのなす角は、A、B、Cが一直線上にあるとき、平角と言ひ、その大きさは180度になる」という原理が必要になります。このことと、平行線の性質『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』を使うと、『三角形の内角の和が180度である』ことを証明できるのです。以上をヒントに、この証明を考えてみましょう。



問題1

「三角形の内角の和が180度である」ことを、平行線の性質『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』を利用して証明しましょう。



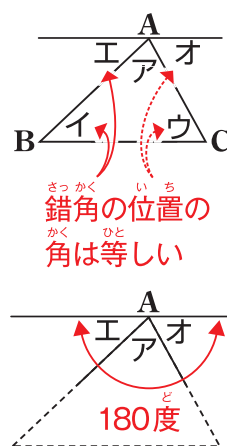
考え方

平角180度を使うために、3つの内角を1つの直線上に集

めることを考えてみます。そのためには、どんな補助線を引くとよいでしょうか。

証明

点Aを通り辺BCを含む直線BCと平行な直線をひき、角ア、イ、ウ、エ、オを、図のようにとります。すると、平行線の性質『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』ことから、角イ=角エ、角ウ=角オとわかります。ここで、角ア+角エ+角オは、直線上の角なので、180度です。よって、角エとオを、それぞれの角と等しい角イとウにとりかえた角ア+角イ+角ウも180度になります。すなわち、三角形の内角の和は180度です。



三角形の外角についての性質

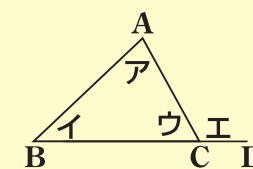
ようやく、「三角形の内角の和が180度である」ことを証明できました。その証明は、合同の公理やそこから導かれた根本原理だけではできず、合同の公理から導かれない平行線の性質『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』という原理が必要となりました。そして、数学では、平行線の性質の原理を、『直線LとL上にはない点Aが与えられているとき、Aを通りLに平行な直線は1本だけ存在する』というプレイフェアの公理をより基本的な原理と考えて、この公理から平行線の性質の原理を証明することにしたのでした。とはいえ、前回の記事で確認したように、平行線の性質を用いてプレイフェアの公理を証明することもできるので、実のところ、平行線の性質とプレイフェアの公理のどちらをより基本的な(証明せずに認める原理である)公理としても論理的には問題がなかったりします。そこで、「三角形の内角の和は180度を示すには？」という記事の最後に、『三角形の内角の和が180度である』という原理と平行線の性質が、どちらをより基本的な原理と考えてもその原理から相手を証明することができる(数学で

は「同値である」と言ひます)かどうかについて考えてみたいと思ひます。そのために何を考えればよいかというと、平行線の性質の原理を用いて『三角形の内角の和が180度である』という原理を証明することはできているので、その逆である『三角形の内角の和が180度である』という原理を用いて平行線の性質の原理を証明できるかを考えればいわけです。

そのための準備として、今回のチャレンジ問題では、三角形の外角の性質について考えておこうと思ひます。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

右の図のように△ABCの内角をア、イ、ウとおき、角ウの外角(隣り合う内角と足すと平角になる角)をエとおくと、『三角形の2つの内角の和が、残りの内角の外角と等しくなる』、すなわち図で、角ア+角イ=角エになることを証明してみましょう。



考え方

問題1

を参考に補助線を引く方法や、『三角形の内角の和が180度である』ことを使う方法など、いろいろな証明が考えられます。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

(図を描くときの注意)

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

(根本原理)

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・3辺が互いに等しい三角形は合同(ぴったり重なる)である。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しいならば二等辺三角形である。
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である。
- ・対頂角は等しい。
- ・直線LとL上にはない点Aが与えられているとき、Aを通りLに平行な直線は1本だけ存在する。
- ・2直線において錯角の位置の角が等しいならば、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。