



新数学の世界

のぞいてみよう

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界



<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>

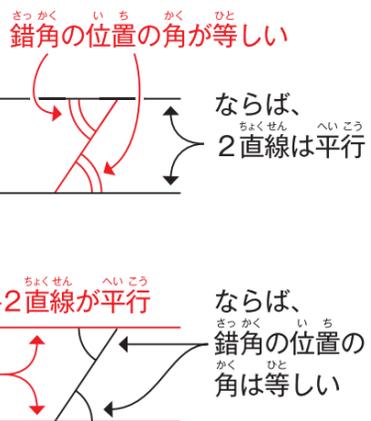
ユークリッド
幾何の世界

第11回 「三角形の内角の和は180度」を示すには?(その4)



今回は、「三角形の内角の和が180度である」ことを証明するにはどうすればよいかを考えていく記事の4回目になります。

前回、三角形の3つの内角を直線上に集めるために必要な原理として、2直線とその2直線に対する錯角の位置にある角に関する2つの原理、『2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である』（平行になるための条件）という原理と、この原理とは逆の原理である『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』（平行線の性質）という原理のうち、「平行になるための条件の原理」は証明しましたが、肝心の「平行線の性質の原理」の方は証明されていません。

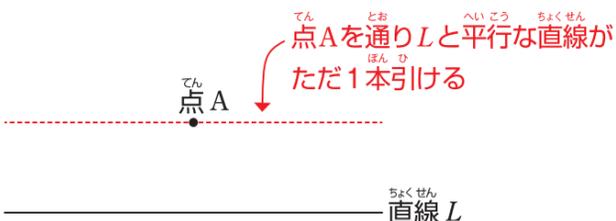


今回は、この「平行線の性質の原理」について考えていきましょう。

平行線の性質は証明できるの？

さて、平行線の性質『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』は、この記事で扱ってきた「合同についての原理」から証明できるのでしょうか。

実は、証明できないことが、数学者たちの研究からわかっています。そこで数学では「平行線の性質の原理」を証明でき、逆に、「平行線の性質の原理」から証明することもできる原理として、平行線があるとすれば1本だけであるという原理『直線LとL上にない点Aが与えられているとき、Aを通りLに平行な直線は1本しかない』（プレイフェアの公理）を証明の出発点となる根本原理として採用しました。



前回証明した『2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である』を考えれば、Aを通る直線を錯角の位置の角が等しくなるように引くことで平行線が必ず描けますから、Aを通る平行線は必ず存在します。この平行線が1本だけだよということ、あたりまえだと思う人も多いと思います。

ここからは、「合同についての原理」（したがって、そこから証明できる「平行になるための条件の原理」も）を証明の根拠になる根本原理として採用している状況において（つまり、「平行になるための条件の原理」は必要ならば使ってよいという状況で）、「平行線の性質の原理」と「平行線が1本だけであるという原理」が、その原理を根拠として、互いに相手を証明することができる（このことを2つの原理が同値であるといいます）ということ、問題として考えてもらおうと思います。

問題 1

『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』（平行線の性質）という原理を証明の根拠に用いて、『直線LとL上にない点Aが与えられているとき、Aを通りLに平行な直線は1本しかない』ことを証明してみましょう。

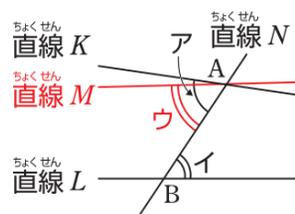
考え方

前回もでてきた背理法を考えると……。

証明

点Aを通り直線Lと平行な直線が2本以上あると仮定します。

そのうちの2本をK、Mとし、角ア、イ、ウを、図のようにとります。



すると、平行線の性質『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』より、角ア=角イ、角ウ=角イとわかります。よって、角ア=角ウです。ところが図より、角ア>角ウなので、矛盾です。

したがって、平行線は1本しか引けないことがわかりました。

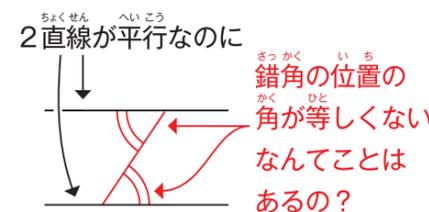
では、逆に、「プレイフェアの公理」から、「平行線の性質」を証明することを、今回のチャレンジ問題にしましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

『直線LとL上にない点Aが与えられているとき、Aを通りLに平行な直線は1本しかない』（プレイフェアの公理）という原理を証明の根拠に用いて、『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』ことを証明してみましょう。

考え方

下の図のように、2直線が平行なのに、錯角の位置の角が等しくないとしたらどうなるかを考えてみてください。すると矛盾が……。



証明のための根本原理と図を描くときの注意

（図を描くときの注意）

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

（根本原理）

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形は合同（ぴったり重なる）である。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である。
- ・対頂角は等しい。
- ・2直線において錯角の位置が等しければ、その2直線は平行である。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。