新数学の世界をのぞいてみよう

執筆・編集：佐藤 太郎

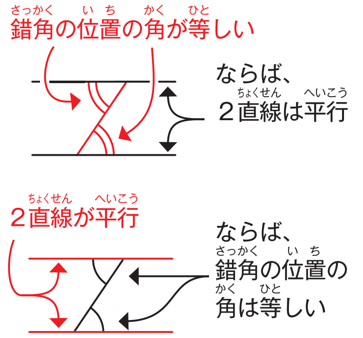
コンパスと定規で描ける図形の世界

過去の記事の目次はこちらから
https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/

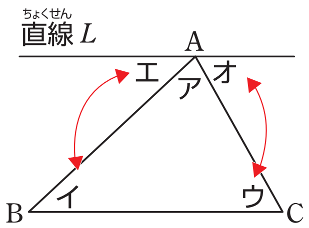
ユークリッド幾何の世界 第10回「三角形の内角の和は180度」を示すには？（その3）

今回は、「三角形の内角の和が180度である」ことを証明するにはどうすればよいかを考えていく記事の3回目になります。

前回、三角形の3つの内角を直線上に集めるために必要な原理として、2直線とその2直線に対する錯角の位置にある角に関する2つの原理、『2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である』（平行になるための条件）という原理と、この原理とは逆である『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』（平行線の性質）という原理までたどりつきました。



これらの原理があれば、右の図において、「角イ＝角エとなるように、点Aを通る直線Lを引くと、平行になるための条件の原理から直線Lと辺BCが平行とわかり、平行線の性質の原理から角ウ＝角オとわかるので、角ア、イ、ウを角ア、エ、オに集められる」と考えたり、「点Aを通る直線Lを、BCと平行になるように引き、平行線の性質の原理から、角イ＝角エ、角ウ＝角オとわかるので、角ア、イ、ウを角ア、エ、オに集められる」と考えることができるようになります。



今回はこの2つの原理のうちで、合同の原理から証明できる「平行になるための条件の原理」の証明を最終目標にしたいと思います。

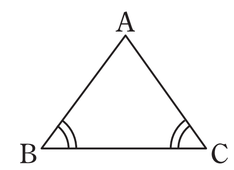
背理法について

これも前回確認しましたが、今までに説明してきた証明の根拠として使うことのできる根本原理には、「ある図形についての状況の仮定から、平行が導ける」という原理は存在しません。したがって、今までに出てきた根本原理を用いて普通の証明でこの原理を証明することはできそうにないので、背理法という証明法を考えることになります。

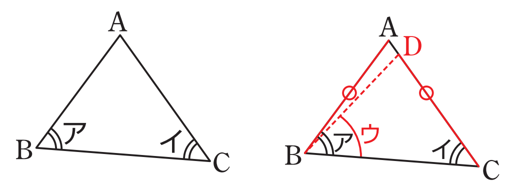
ここでは、すでに何回か使ってきた背理法とはどのような証明法なのかを、もう一度確認しておくことにします。

背理法とは、証明したい主張（例えば、長さが等しいとか、角が等しいとか）があるとき、その主張の否定（長さが等しいのであれば、長さが等しくない）を仮定して、その仮定から矛盾（例えば、1＝2とか、180度＝180度より大きい角度とか）が証明できれば、矛盾が証明できてはいけないので、証明の出発点になった「証明したかった主張の否定」が正しくなかった、つまり、証明したかった主張が正しいと考えてよい、という証明法です。

背理法の証明の具体例として、第7回のチャレンジ問題「△ABCにおいて、ABとBCの間の角とACとBCの間の角が等しければ、AB＝ACになることを、根本原理から証明してください」の証明を、もう一度みておきましょう。



証明は、『図のように角アとイをおきます。仮定より、角ア＝角イ…①です。ABよりもACが長いと仮定すると、AB＝DC…②となる点DがAC上にとれます。ここで、図のように角ウをおきます。△ABCと△DCBにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」ことから、BC＝CB（共通）と①②より、△ABCと△DCBは合同です。よって、△ABCの角イと△DCBの角ウがぴったり重なるので、角イ＝角ウ…③です。①③より、角ア＝角ウですが、図より、角ア＞角ウなので、矛盾しています。



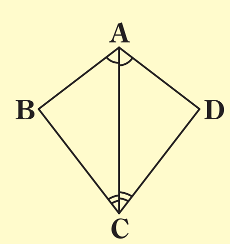
したがって、「ABよりもACが長くてはいけない」ことがわかりました。ACよりもABが長いと仮定しても、同様に考えて、矛盾することが証明できるので、「ACよりもABが長くてはいけない」ことも証明できます。よって、AB＝ACでなければいけないとわかりました』というものでした。

証明したい正しいはずの主張をあえて否定した、間違っているはずの主張を出発点にすることで、矛盾を導いているわけです。

それでは、この証明を参考にしながら、背理法の練習をしてみることにしましょう。

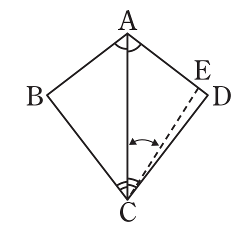
問題1

「四角形ABCDにおいて、ACが∠BAD、∠BCDの二等分線ならば、AB＝ADである」ということを、『二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である』という原理だけを用いて、背理法で証明してみましょう。



考え方 証明したい主張はAB＝ADです。では、この否定はなんでしょうか。

証明 仮定より、∠BAC＝∠DAC…①、∠BCA＝∠DCA…②です。AB＜ADと仮定すると、AB＝AE…③となる点EがAD上にとれます。△ABCと△AECにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」ことから、AC＝AC（共通）と①③より、△ABCと△AECは合同です。よって、合同の対応する角なので、∠ACB＝∠ACE…④です。②④より∠ACD＝∠ACEですが、図より∠ACD＞∠ACEなので、矛盾が証明できました。AB＞ADと仮定しても、同様に矛盾が証明できるので、AB＝ADでなければいけないとわかりました。

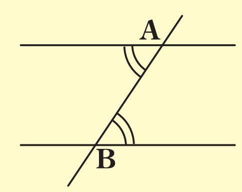


平行になるための条件の原理の証明

では、ここまでの準備のうえで、平行になるための原理の証明にチャレンジしてもらおうと思います。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である』ことを、『二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である』という原理だけを用いて、背理法で証明してみましょう。



考え方 証明したい主張を否定して、錯角の位置の角が等しい2直線が交わっているとしたらどうなるかを考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

〈根本原理〉

・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
・三辺が互いに等しい三角形は合同（ぴったり重なる）である。
・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。
・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である。
・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である。
・対頂角は等しい。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。