



新数学の世界をのぞいてみよう

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

ユークリッド 幾何の世界

第9回 「三角形の内角の和は180度」を示すには?(その2)



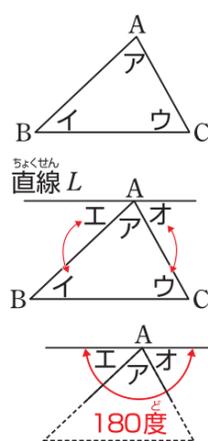
<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>

前回の記事から「三角形の内角の和が180度である」ことを証明するにはどうすればよいかを考えています。180度であることを導くためにどんな原理が必要かを考え、「3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である」という原理に注目するところまでたどりついて、今回は終了しました。

今回は、この続きから考えていきます。

三角形の3つの内角を直線上に集めるには？

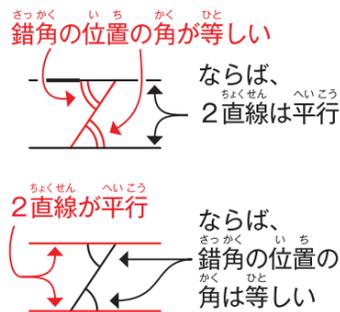
三角形ABCにおいて、図のように角ア、イ、ウをおきます。内角の和が180度を示すということは、角ア+角イ+角ウが180度になるということなので、図のように、Aを通る直線Lを引き、図の角工に角イを移し、図の角オに角ウを移すことができれば、「3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である」という原理を使って、角ア+角イ+角ウ=角工+角ア+角オ=180度のように示すことができそうです。



では、△ABCに対して、直線Lがどのような位置関係にあると、角工=角イや角オ=角ウになるのでしょうか。ここで、用語の確認をしておきます。右の図のように、2本の直線LとMにもう1本の直線Nが交わってできる8つの角のなかで、角カとキ、角クとケを錯角の位置にあるといいます。



実は、2直線とその2直線に対する錯角の位置にある角の間には、『2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である(2直線は交わらない)』という原理と、この原理とは逆の原理である『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』(平行線の性質)という原理が知られています。そこで、これらの原理が、どのような原理から証明できるのかを考えることにしましょう。



錯角についての原理は、合同から証明できるのか？

『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』(平行線の性質)という原理にも、『2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である』(平行線になるための条件)

という原理にも、「平行」という図形の状況が含まれています。

しかし、この記事で今までに説明してきた証明の根拠として使うことのできる根本原理には、「平行という仮定から、別の図形の状況が導ける」という原理も、「ある図形についての状況の仮定から、平行が導ける」という原理も存在しません。したがって、普通の証明で錯角についての原理を証明することはできそうにありません。そうすると、証明できる可能性があるとしたら、背理法を使うのではということになります。

そこで、『平行線の性質の原理』を背理法で証明するにはどうするかを考えてみます。導きたい結論である「錯角の位置の角が等しい」を否定した「錯角の位置の角が等しくない」ことから矛盾を導くことになり、結局、仮定に残る「平行」を証明にどう使うのがよくなりません。

一方、『平行になるための条件の原理』の方は、導きたい結論の「平行になる」ことの否定である「平行でない(2直線が交わる)」ことを仮定するので、こちらなら、平行の仮定を使ったり、平行を原理から導く必要がなくなります。したがって、いま使える合同の原理から証明できる可能性があるかもしれません。そこで、このことを考えてみたいのですが、長くなったので今回はここまでとします。

最後に、2本の直線が平行かどうかという、場合によっては無限の先まで考えなければいけない状況を、どうやって確認するのかについて、まとめをして今回の記事は終わりにしましょう。『平行になるための条件の原理』を認めて、錯角の位置の角が等しいことを確認できれば、平行とわかることになります。

では、『錯角の位置の角が等しくなければ平行ではない』といえるのでしょうか。まずは、この問題を考えてもらいます。

問題1

「2直線において、錯角の位置の角が等しくなければ、その2直線は平行でない」ということを、『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』(平行線の性質)という原理を認めて、証明してみましょう。

考え方 背理法を使ってみましょう。

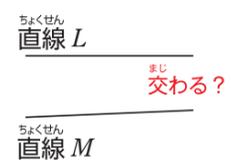
証明

錯角の位置の角が等しくない…①となると、平行ではないことを証明します。そのために、証明したい「平行ではない」という主張を否定し、「平行である」として矛盾を証明します(矛盾が証明できてはいけなないので、「平行である」としてはいけな、つまり、「平行ではない」ことが証明できたことにな

ります)。『2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい』ことから、「平行である」とより、錯角の位置の角が等しい…②が証明できますが、②は①と矛盾します。したがって、「平行である」としてはいけなないので、「平行ではない」ことが証明できました。

無限の彼方で交わるかどうかを確かめるには？

さて、以上のことから、平行という、無限にのびる直線同士が交わらないという性質が、目の前の角が等しいかどうかだけで確認できるといことがわかりました。これらの性質がなければ、私たちは無限にのびる直線同士が交わるかどうかを確かめることができないので、とても大切な原理とわかります。このことを今回のチャレンジ問題にしました。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行であり、錯角の位置の角が等しくなければ、その2直線は平行ではない」という原理を認めて、2直線LとMが平行かどうかを、コンパスと定規を用いた作図によって判定する方法を考えてみましょう。ただし、作図した点を与えられた直線上にあるかどうかは判定できるとします。

考え方 錯角の位置の角が等しいことを確認するには……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

図を描くときの注意

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

根本原理

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形は合同である(ぴったり重なる)。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である。
- ・対頂角は等しい。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。