



コンパスと定規で描ける図形の世界

ユークリッド
幾何の世界

第8回

「三角形の内角の和は180度」を示すには？(その1)



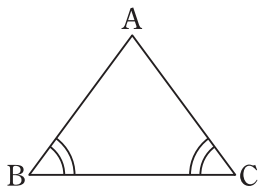
過去の記事の目次はこちらから



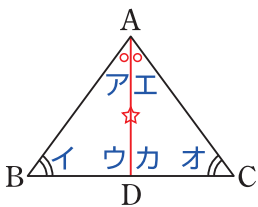
<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>

三角形の内角の和は180度

前回の記事で、「二角が等しい三角形は二等辺三角形になる」ことを証明しましたが、この記事でまだ出てきていない根本原理である「三角形の内角の和は180度である」ことを使った証明はしませんでした。もし、この原理が使えるのであれば、「△ABCにおいて、ABとBCの間の角とACとBCの間の角が等しければ、AB＝ACになる」ことの証明を、次のようにすることもできます。



『(証明) ABとACのなす角の二等分線と辺BCの交点をDとし、図のように、角Aから力をおきます。すると、「三角形の内角の和は180度」と角A＝角工、角イ＝角オより、角ウ＝180度－角ア－角イ＝180度－角エ－角オ＝角力になります。よって、△ABDと△ACDにおいて、AD共通、角A＝角工、角ウ＝角力より、「一辺とその両端の角が互いに等しい」ので、△ABDと△ACDはぴったり重なります。したがって、AB＝ACです。』

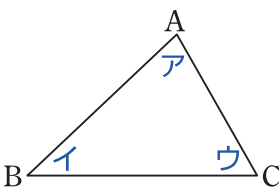


このように、「三角形の内角の和は180度である」ことを使いたい場面はたくさんありそうですが、この根本原理はどんな原理から証明されるのでしょうか。今回から何回かにわたって、そのことを考えていきたいと思います。

「三角形の内角の和が180度」の180度とは？

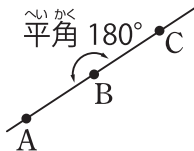
まずは、三角形の内角の和が180度になるとはどういうことを確認しておきます。

右の図の△ABCにおいて、角A、イ、ウを三角形の内角と言い、内角の和は、この角A＋角イ＋角ウが180度になるといことです。



では、「三角形の内角の和が180度である」という主張の180度とは何かを考えてみましょう。角度は次のように決めるのです。

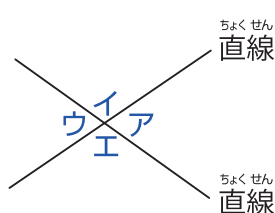
右の図のようなBAとBCのなす角は、A、B、Cが一直線上にあるとき、平角といいます。平角を180等分した角の大きさを1度とすると、平角は180度になります。このことから、「3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である」という根本原理が得られるので、この原理を用いて180度であることを導くことができそうです。



最終目標は、「三角形の内角の和が180度である」ことを証明することですが、その証明について考えるのはここまでにして、ここで出てきた「3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である」という根本原理を使う問題を考えてみることにします。

交わる2直線のなす角は等しい

右の図のような交わる2直線の作る4つの角A、イ、ウ、エのうち、アとウ、イとエをそれぞれ対頂角の位置にあるといいいます。

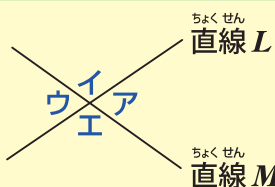


このとき、アとウ、イとエのそれぞれが等しいことを証明してみようと思います。

どちらか一方を証明すれば、残る一方の証明はまったく同じなので、今回はアとウが等しいことを証明しておきましょう。

問題1

右の図のように交わる2直線LとMがなす対頂角アとウが等しいことを証明しましょう。



考え方

「平角は180度」をどう使うのか考えてみてください。

証明

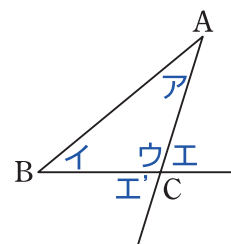
角A＋角イは、直線M上の角なので、180度です。角ウ＋角イも、直線L上の角なので、180度です。よって、角A＋角イと角ウ＋角イは等しいとわかります。

したがって、両方の平角から共通の角イを引いた残りの角アと角ウは等しいとわかります。

三角形の1つの内角の外角と残りの内角の大小は？

最後に、いま証明した「対頂角は等しい」という根本原理を使う問題を考えてみましょう。

右の図のような三角形ABCの内部の3つの角ア、イ、ウを「三角形の内角」といい、角エ、エ'を「内角ウの外角」といいます。このとき、外角エ、エ'は、内角ア、イのどちらよりも必ず大きくなることを証明しようと思います。



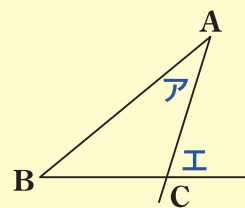
問題1 から外角エとエ'は等しいとわかるので、角エが角アより大きいことが証明できれば、角エと等しい角エ'は角アより大きいですし、同じように角エ'と角エが角イより大きいことも証明できます。

結局、角エが角アよりも大きいことを証明すればよいわけです。

それでは、このことを今回のチャレンジ問題にします。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

右の図のような三角形ABCにおいて、外角エは内角アより大きいことを証明しましょう。



考え方 対頂角が等しいだけでなく、三角形の合同を上手く使って角アと等しい角を角エの中に作れるかがカギになります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

〈根本原理〉

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形は合同である（ぴったり重なる）。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。