



新数学の世界を のぞいてみよう

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

ユークリッド
幾何の世界

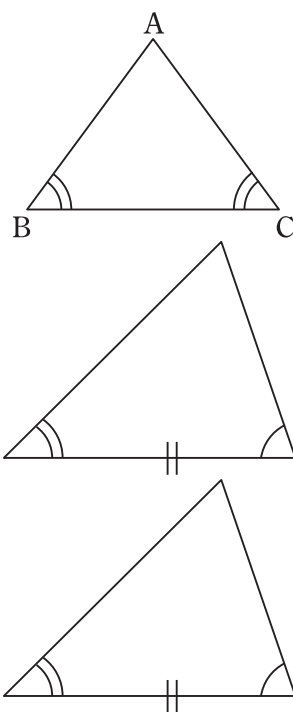
第7回

「二角が等しければ二等辺三角形」をどう証明しよう？

第4回（4月17日付）の記事で、「二等辺三角形の底角は等しい」ことを証明しました。今回は、その逆の性質である「二角が等しい三角形は二等辺三角形になる」ことの証明を考えてみましょう。

三角形がぴったり重なるための新しい根本原理

すでに、たくさんの根本原理を確認しているので、「二角が等しい三角形は二等辺三角形になる」ことを、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」ことを使って証明できるのですが、ほかの証明もできるように、三角形が合同になるための新しい根本原理を導入して、その根本原理を使った証明も考えてほしいと思います。



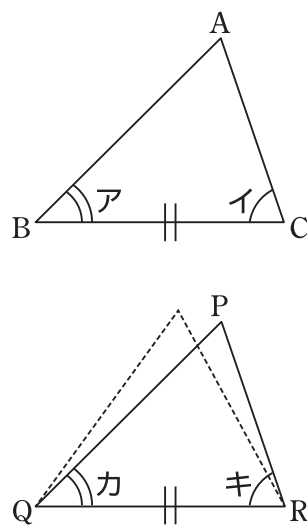
ここで新しく導入する根本原理は、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である」という原理です。まずは、この原理の証明を考えてみましょう。

問題1

「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である」ことを、「三辺が互いに等しい三角形は合同である」という根本原理を使って証明してください。

考え方

右の図のように、2つの三角形を△ABCと△PQRとし、BC=QR、角ア=角力、角イ=角キとします。このとき、「三辺が互いに等しい三角形は合同である」ことを使って、△ABCと△PQRが合同であることを証明したいわけです。そこで、△ABCと三辺が互いに等しい三角形の、2頂点が△PQRの2頂点Q、Rと重なり、残りの頂点がQRに対して頂点Pと同じ側にあるように描いてみると……。



証明

2つの三角形を△ABCと△PQRとし、△ABCのBAとBCの間の角をア、CAとCBの間の角をイ、△PQRのQPとQRの間の角を力、RPとRQの間の角をキ、BC=QR、角ア=角力、角イ=角キとします。

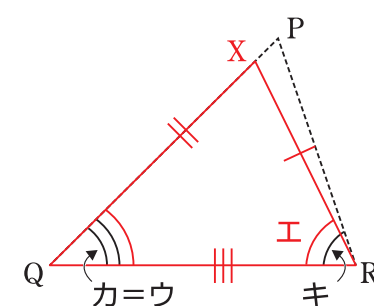
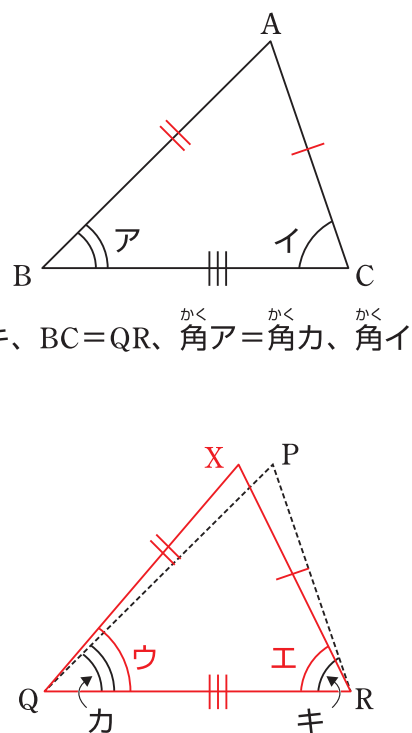
さらに、点Qを中心とし半径ABの円と点Rを中心とし半径ACの円の2つの交点のうち、直線QRに対して、Pと同じ側にある点

をXとします。すると、

図の描き方から、△ABCと△XQRは、三辺が互いに等しいので、合同です。つまり、三角形の3つの角が互いに等しくなりますから、△XQRの二辺QXとQRの間の角をウとすると、△ABCの角アと△XQRの角ウは等しくなります。

ここで、△ABCの角アと△PQRの角力も等しかったので、結局、角力=角ウになります。すると、△XQRと△PQRにおいて、角力=角ウなので、辺QXと辺

QPが重なるとわかります。△XQRの二辺RXとRQの間の角をエとし、同様に考えると、角エ=角イ、角イ=角キより、角キ=角エがわかるので、辺RXと辺RPも重なるとわかります。したがって、点Xと点Pの位置は一致するとわかり、△XQRと△PQRは3つの頂点の位置が一致したので、ぴったり重なり、合同であるとわかりました。△ABCと△XQRも合同であるので、結局、△ABCと△PQRは合同であることが証明できました。

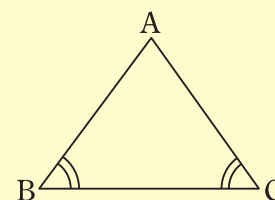


二角が等しければ二等辺三角形になることの証明は？

最後に、二角が等しい三角形が二等辺三角形になることの証明に取り組めます。チャレンジ問題にしますので、がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

「△ABCにおいて、ABとBCの間の角とACとBCの間の角が等しければ、AB=ACになる」ことを、根本原理から証明してください。



考え方

「三角形の内角の和が180度」であることは、まだ使えないので、気をつけましょう。「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」を使っても、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形は合同である」を使っても証明できます。

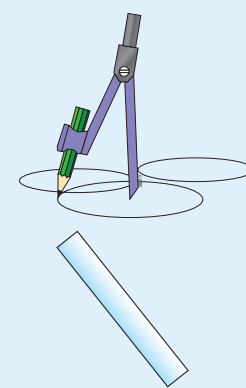
証明のための根本原理と図を描くときの注意

〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

〈根本原理〉

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形は合同である（ぴったり重なる）。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。



チャレンジ問題の解答は、5面をご覧ください。