



コンパスと定規で描ける図形の世界

ユークリッド
幾何の世界

第6回

ユークリッドの証明と平角



<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>



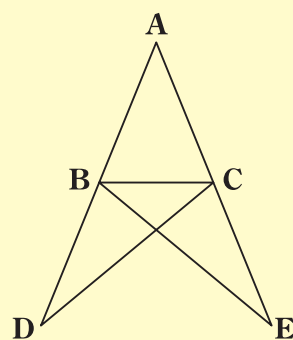
今回は、二等辺三角形の底角が等しいことのユークリッドによる証明をもとに、平角のあつかいについて考えていきます。

二等辺三角形の底角が等しいことのユークリッドの証明

さっそく、次の問題を考えることでユークリッドがどのように証明したのかを見てみましょう。

問題 1

AB=ACの二等辺三角形ABCにおいて、BAとBCのなす角とCAとCBのなす角（二等辺の向かい側にあるこれら2つの内角を底角といいます）が等しいことを、次のような補助線を利用して証明してみましょう。補助線として、ABをBの方へ延長し、その上に点Dをとり、ACをCの方へ延長し、その上に点Eをとり、BD=CEとなるようにします。



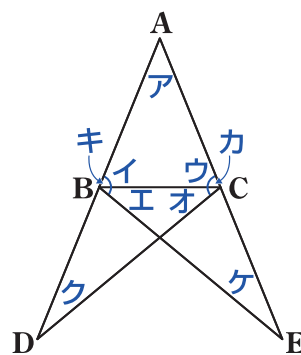
考え方

今証明に使える根本原理は、「三辺が互いに等しい三角形は合同である」と「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」の2つだけですから、このどちらを使うのかを考えることになります。

証明

図のように、角アからケをおきます。
問題の仮定から、AB=AC…①、BD=CE…②です。

△ACDと△ABEにおいて、①②とAD=AB+BD、AE=AC+CEより、AD



=AE…③なので、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」ことから、①③と角アが共通より、△ACDと△ABEは合同です。

よって、角カ=角キ…④、角ク=角ケ…⑤、CD=BE…⑥です。
△BCDと△CBEにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」ことから、②⑤⑥より、△BCDと△CBEは合同です。

よって、角エ=角オ…⑦です。

④⑦と角イ=角キー角エ、角ウ=角カー角オより、角イ=角ウです。

このようにユークリッドは証明したのでした。

ぴったり重なる角の補角もぴったり重なる

問題 1

で確認したユークリッドによる証明では、直線ABD上の角（平角といいます）である「BAとBDのなす角」や直線ACE上の角である「CAとCEのなす角」を考え、角イ=平角ー（BCとBDのなす角）、角ウ=平角ー（CBとCEのなす角）のように示す、とはあえてしていないようです。

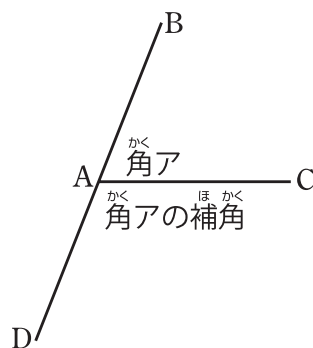
どうもユークリッドの時代には、直線ABD上のBAとBDのなす平角を1つの角とは考えていなかったので、平角を使った証明にはしなかったらしいのです。

とはいえ、等しい2つの角があるとき、それらの角と足して平角ができる角（補角といいます）同士も等しくなることは使えた方が便利ですから、今回はこの証明をチャレンジ問題にしたいと思います。

補角をきちんと定義しておきましょう。

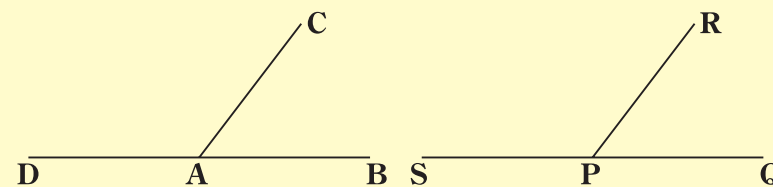
ABとACのなす角があり、BAのAの方への延長線上に点Dをとるとき、ACとADのなす角を「ABとACのなす角の補角」といいます。

それでは、チャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

下の図において、A、B、Dは一直線上にあり、P、Q、Sも一直線上にあります。AB=PQ、AC=PR、AD=PS、ABとACのなす角とPQとPRのなす角が等しいとき、補角であるACとADのなす角とPRとPSのなす角が等しいことを証明してみましょう。



考え方

問題 1 と同じように、「三辺が互いに等しい三角形は合同である」と「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」のどちらの根本原理を使うのかを考えてみましょう。

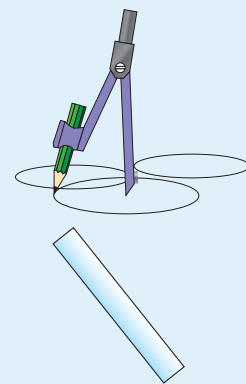
証明のための根本原理と図を描くときの注意

〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

〈根本原理〉

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形は合同である（ぴったり重なる）。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。

