



コンパスと定規で描ける図形の世界



<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>

ユークリッド
幾何の世界

第5回

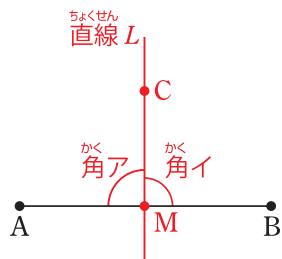
三角形の外接円を描いてみよう



今回は、三角形の外接円、すなわち、三角形の3頂点を通る円の描き方を考えていきます。

線分の垂直二等分線をどう描こう？

ある直線 L が線分 AB 上の点 M を通り、直線 L 上の M 以外の点 C に対して、 CM と AM のなす角 $\angle A$ と CM と BM のなす角 $\angle I$ が等しいとき、直線 L と線分 AB は垂直といい、角 $\angle A$ と角 $\angle I$ を直角といいます。ここで、 M が線分 AB の中点のとき、直線 L を線分 AB の垂直二等分線といいます。



まずは、コンパスと定規で図形を描くときに、線分の垂直二等分線をどうやって描くかについて考えましょう。

問題 1

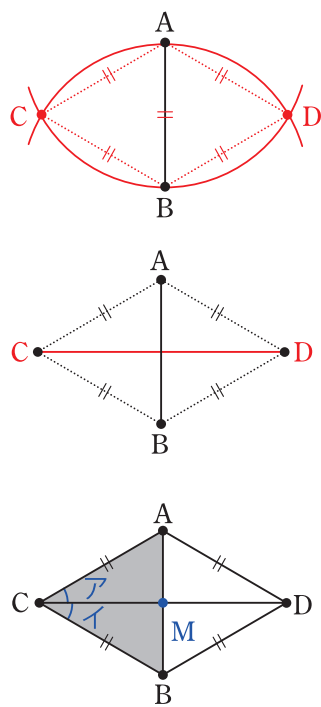
線分 AB が与えられているとき、コンパスと定規を用いて、線分 AB の垂直二等分線を描いてみましょう。

いろいろな描き方があるので、以下は1つの例です。

描き方

A を中心とし半径 AB の円と B を中心とし半径 BA の円を描きます。そして、その2円の交点を C 、 D とします。

ここで、2点 C 、 D を通る直線を引けば、直線 CD が線分 AB の垂直二等分線になります。



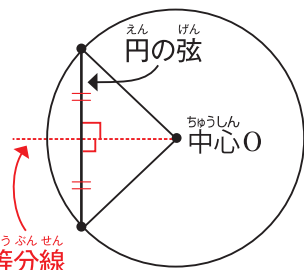
証明

図のように、角 $\angle A$ 、 $\angle I$ をおきます。図の描き方から、四角形 $ACBD$ の四辺の長さは等しい…①です。 $\triangle ACD$ と $\triangle BCD$ において、「三辺が互いに等しい三角形は合同である」ことから、 $AC=BC$ (①より)…②、 $AD=BD$ (①より)、 CD 共通より、 $\triangle ACD$ と $\triangle BCD$ は合同です。よって、角 $\angle A=角\angle I$ …③です。 AB と CD の交点を M とします。

「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」ことから、②③と CM 共通より、 $\triangle ACM$ と $\triangle BCM$ は合同です。よって、 $AM=BM$ と AM と CM のなす角と BM と CM のなす角が等しいことがわかります。したがって、直線 CD は線分 AB の垂直二等分線であることがわかりました。

円の中心は、必ず弦の垂直二等分線上にある

円周上の2点を結ぶ線分を、その円の弦といいます。弦の垂直二等分線を描くと、垂直二等分線は必ず円の中心を通りそうですね。ここでは、この証明を考えてみたいと思います。



問題 2

中心が点 O である円周上の2点 A 、 B を結ぶ弦 AB が与えられているとき、弦 AB の垂直二等分線 L が中心 O を通ることを証明してみましょう。

証明

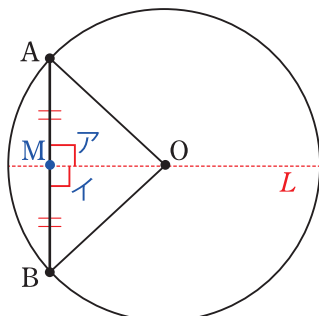
図のように、角 $\angle A$ 、 $\angle I$ をおき、弦 AB の中点を M とします。

すると、 $AM=BM$ …①です。

$\triangle OAM$ と $\triangle OBM$ において、「三辺が互いに等しい三角形は合同である」ことから、①と $OA=OB$ (円の半径)、 OM 共通より、 $\triangle OAM$ と $\triangle OBM$ は合同です。よって、角 $\angle A=角\angle I$ …②です。

①②より、直線 OM は弦 AB の垂直二等分線 L と一致します。

したがって、弦 AB の垂直二等分線 L は中心 O を通ることが証明できました。

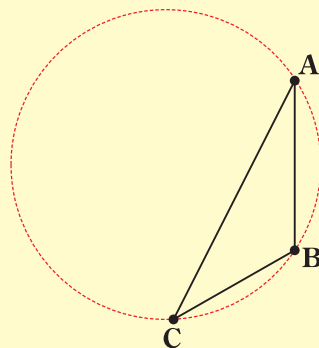


三角形の外接円を描いてみよう

ここまでで考えてきた2つの問題をうまく使って解決できる問題として、三角形の3頂点を通る円、すなわち、三角形の外接円の作図法を考えてみたいと思います。円をコンパスを使って描くためには、中心と半径がわかっていると描けませんよね。では、三角形の外接円の中心や半径はどうすればわかるのでしょうか。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

三角形 ABC が与えられています。三角形の外接円をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

円の中心を、コンパスと定規で円と直線を描いていくことで、どのように決められるのかが、ここで問題になっていることです。描きたい円の中心は3点 A 、 B 、 C からの距離が等しい点であることを考えると、問題 2 が決め手になりそうですが……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

〈根本原理〉

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形は合同である (ぴったりに重なる)。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。