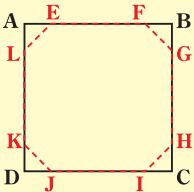
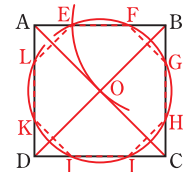


正方形ABCDが与えられているとき、下の図のように、その正方形と四辺が重なるような正八角形EFGHIJKLの8つの頂点の位置を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。ただし、定規とコンパスは合計で4回までしか使えないことにします。



描き方

正方形ABCDの対角線ACとBDを描き、その交点をOとします。中心がBで半径OBの円Bを描き、円BとABの交点をEとします。中心がOで半径OEの円Oを描き、円Oと正方形の辺との交点を、右の図のよう



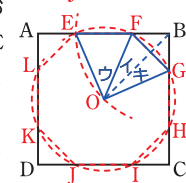
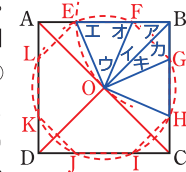
うに、F、G、H、I、J、K、Lとおきます。すると、定規を2回、コンパスを2回、合計4回で描けていて、このEからLの8点が求めるものになります。

証明

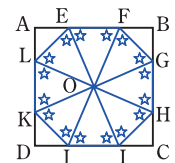
本文の「問題2」より、 $OA = OB = OC = OD \dots ①$ 、図の描き方から、 $OB = EB \dots ②$ 、 $OE = OF = OG = OH = OI = OJ = OK = OL \dots ③$ です。図のように、角アからキをおきます。

本文の「問題1」より、角ア=角カ=45度…④です。
△BOEにおいて、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、②より、角イ+角ウ=角エ…⑤です。④⑤と「三角形の内角の和は180度である」ことから、 $\text{角イ} + \text{角ウ} = \text{角エ} = (180 \text{度} - \text{角ア}) \div 2 = (180 \text{度} - 45 \text{度}) \div 2 = 67.5 \text{度} \dots ⑥$ です。△OEFにおいて、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから $OE = OF$ (③) より、角エ=角オ…⑦であり、⑥⑦より、 $\text{角エ} = \text{角オ} = 67.5 \text{度} \dots ⑧$ です。

「三角形の内角の和は180度である」ことと⑧より、 $\text{角ウ} = 180 \text{度} - (\text{角エ} + \text{角オ}) = 180 \text{度} - 67.5 \text{度} \times 2 = 45 \text{度} \dots ⑨$ 、⑥⑨より、 $\text{角イ} = 67.5 \text{度} - 45 \text{度} = 22.5 \text{度} \dots ⑩$



す。△BOH、△OHGで同様に、角キ=22.5度…⑪です。△OEFと△OFGにおいて、⑩⑪より、 $\text{角イ} + \text{角キ} = 22.5 \text{度} \times 2 = 45 \text{度} \dots ⑫$ であり、⑨⑫より、 $\text{角ウ} = \text{角イ} + \text{角キ} \dots ⑬$ です。「二辺とその間の角が互いに等しい三角形は合同である」ことから、③⑬より、△OEFと△OFGは合同…⑭です。同様にして、△OHGと△OGF、△OGHと△OHI、△OJIと△OIH、△OIJと△OJK、△OLKと△OKJ、△OKLと△OLEも、それぞれ合同です。よって、△OEF、△OFG、△OGH、△OHI、△OIJ、△OJK、△OKL、△OLEは、すべて合同…⑮です。よって、 $EF = FG = GH = HI = IJ = JK = KL = LE$ です。また、⑧⑮を考えると、八角形EFGHIJKLの内角はすべて $67.5 \text{度} \times 2 = 135 \text{度}$ です。よって、八角形EFGHIJKLは正方形ABCDと四辺が重なる正八角形です。



★=67.5度