チャレンジ問題（解答・解説）

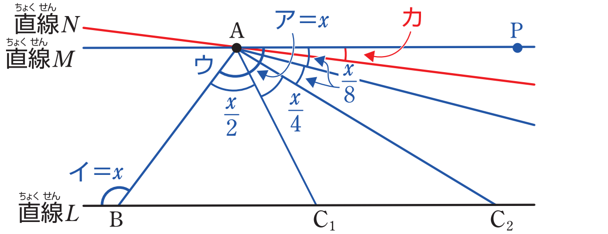
「新・数学の世界をのぞいてみよう」の本コーナーは、7面をご覧ください。

企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

「三角形の内角の和は 180度である」という原理を証明の根拠に用いて、プレイフェアの公理「直線LとL上にない点Aが与えられているとき、Aを通りLに平行な直線は 1 本だけ存在する」ことを証明してみましょう。

証明

図のように点Aを通る直線Mと点Bを角ア＝角イ…①となるようにとります。「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、①より、直線Lと直線Mは平行です。



ここで、角ア＝角イ＝xとおき、図のように、直線M上に点P、点Aを通り角アの内部を通る直線Nをとります。直線L上に、図のように点C_1をBA＝BC_1となるようにとると、問題 1 から、「ABとAC_1のなす角」と「AC_1とAPのなす角」はどちらも $\frac{x}{2}$ になります。

直線L上に、図のように点C_2をC_1A＝C_1C_2となるようにとると、問題 1 から、「AC_1とAC_2のなす角」と「AC_2とAPのなす角」はどちらも$\frac{x}{2^2}=\frac{x}{4}$になります。

同様に繰り返していくと、「AC_{n-1}とAC_nのなす角」と「AC_nとAPのなす角」はどちらも $\frac{x}{2^n}$ になります。図のように角カをとるとき、角カが「AC_nとAPのなす角 $\frac{x}{2^n}$」より大きくなるような整数nがあると証明できれば、角カの内部をAC_nが通っていることとなり、直線Nが△ABC_nの内部を通っていることになります。つまり、直線Nが△ABC_nの辺BC_nと交わるとわかります。

アルキメデスの原理「0より大きい2数a,bにおいて、$a>b$のとき、小さい方の数b自身をどんどん足していくと必ずaより大きくなる、すなわち、$a<mb$となる整数mがある」ことから、x＝角ア＞角カにおいて、$x<$角カ$\times 2^n$、すなわち、$\frac{x}{2^n}<$角カとなる整数nが存在するとわかります。

したがって、直線Nは直線Lと平行ではないとわかりました。

直線Nが図の角ウの内部を通るときも同様に証明できるので、点Aを通り直線Lと平行な直線は1本だけ存在することが証明できました。