SEG 中1数学 授業見学レポート

公理と証明済みの定理だけを使い 自力で新しい定理の証明に挑む

数学専門塾としてスタートしたSEG。それだけに、数学の指導力には定評がある。数学の楽しさを味わいながら、気がつくと大学入試の難問を解く力が身についている――そんな声をよく耳にするが、実際にどのような授業が行われているのだろうか。今回参加したのは中1の夏期講習の授業で、テーマは平面幾何。三角形の合同条件を、既知の事実だけで証明していく醍醐味を味わっていただきたい。

一つの公理のみを使って三角形の底角定理を証明

SEGの数学の授業は、基本的に前回習った内容の復習テストから始まる。授業を担当する小林純先生は出席を取り終えると机の間を巡回しながら何人かの生徒にアドバイスして、黒板で復習テストの解説を行い、本日のテーマに入っていく。

「昨日は幾何の証明の仕方を練習しました。練習なので『平角定理』を証明しないまま『対頂角定理』を証明し、『錯角定理』も使えるものとして『同位角定理』『同側内角定理』を証明しました。今日は、いよいよ一から幾何を組み立てていきます」と言うと、先生は黒板に「§3 合同公理」と書いた。

「2つの図形が合同というのは、直観的には、ぴったり重ね合わせることができるということですが、証明では、図形を動かして重ねるといった議論の仕方は許されていません。そこでまず、最も基本的な図形である三角形について、3つの辺の長さと3つの角がすべて等しいときに合同と定義します」と先生。

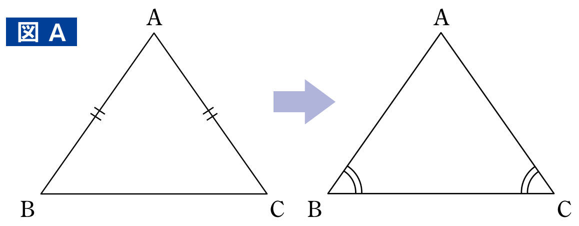
これは当然で納得できるものだろう。先生は続けて生徒に問いかける。「定義はこのようになりますが、この6つの要素全部が等しいことを確認しなくても、合同と言えそうな気がしませんか。直観で構わないので、どれだけ等しいと言えば十分か考えてみましょう」。生徒からは「2つの辺と挟まれた角が同じ」「2つの角と挟まれた辺が同じ」「3辺が同じ」と次々と答が出てくる。

「いろいろと答えてもらったけれども、大雑把には『6つの要素のうち、辺を含む3つが等しいならば合同』と言えそうです。このうち『2つの辺と挟まれた角が等しいならば合同』というものが、テキストにも『ユークリッド幾何の中心的公理』として載っている『二辺夾角相等』という公理で、証明なしに認めます。今日はこれを使って、さまざまなことを導いていきましょう」という先生の言葉で、テキストの問題に本格的に入っていった。

まずは、二辺夾角相等だけを使って底角定理（三角形において2辺が等しいならば底角が等しい）を証明していく。

証明の流れをはっきりさせるために、先生は「仮定は？」「結論は？」と生徒に質問しながら、［仮定］［結論］［証明］の順にしっかりと答案の流れを黒板に書いていく。

図 A



「使える公理は、二辺夾角相等だけです。どこかに1本補助線を引きましょう」とヒントを提示すると、一人の生徒が「Aから底辺に線を引く」。「そうですね。2つの三角形に分けて、その2つが合同であることを示せばいいわけですが、ではどんな線を引いたらいいでしょうか」と返す。線の引き方は、AとBCの中点を結ぶ、AからBCに垂線を引く、∠Aの二等分線を引く、の3通りがあることを示し、「すべて同じ線かもしれませんが、同じだということはまだ証明されていません。今使えるのは二辺夾角相等だけですから……」先生がここまで説明すると、「二等分線が良さそう」とすぐに生徒が反応する。方針が定まった後は、生徒に辺や角を答えさせながら証明していく。

［仮定］　AB＝AC……①
［結論］　∠ABC＝∠ACB
［証明］　∠BACの二等分線とBCの交点をDとする。
よって、∠BAD＝∠CAD……②
△ABDと△ACDにおいて
AD＝AD（共通）……③
①②③より
△ABD≡△ACD（二辺夾角相等）
よって、∠ABC＝∠ACB（合同の対応角）(q.e.d.)

先生は、①②③などが「ルールの前提」であり、（　）内が「ルール名」であることを伝え、どんな前提でどんなルールを使ったのかを、きちんと書くことが大切だということを強調して、休けいに入った。

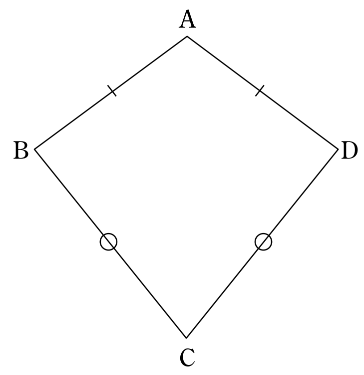
公理と証明された定理から新しい合同条件を証明

休けいが終わると、次は二辺夾角相等の公理に先ほど証明された底角定理を加えて、新しい合同条件を証明していく。

ここからは紙面の都合もあり、授業の中で生徒に質問を投げかけながら丁寧に板書されていった証明のプロセスは省き、ポイントのみを紹介する。

テキストにあるのは、図のような四角形ABCD（AB＝AD、CB＝CD）において△ABC≡△ADCを証明する問だ。

図 B



まず、△ABDと△BCDのそれぞれに底角定理を適用することで、∠ABC＝∠ADCを証明できる。すると、二辺夾角相等により、ACが共通な△ABC≡△ADCが証明された。

実はこの問は、冒頭で生徒が答えていた合同条件の一つ、「三角形の3辺が等しければ合同である」という「三辺相等」を証明するための準備である。この四角形ならACを共有するため二辺夾角相等で△ABC≡△ADCが証明できるが、一般的な離れて存在する3辺がそれぞれ等しい2つの三角形（△ABCと△PQRとする）の合同が証明されたわけではない。では、どうすれば証明できるのか。

するとそこに「ACとPRをくっつければ今の問の形になるから合同を証明できるんじゃない？」と生徒の声。「アイデアは良い！ ですが、最初に言ったように、図を動かしてくっつけるといった議論の仕方は証明では許されていません。では、どうしましょうか」。すると、別の生徒から「じゃあ、同じ形を作ればいいんだ」との声が上がる。

先生は、その声を待っていた！ とばかりにそれを受け「ではこの△ABCに対して、今の問の四角形と同じ形になるように点Dを取ればいいわけですね。どのように取りましょうか」と次の段階へ進む。

ここから、生徒のさまざまな意見に「まだそれは証明されていませんね」「それを証明するのは難しくないですか？」とガイドしながら、生徒の考えを深めさせていく。教えるのではなく、生徒自身が考えることにかなりの時間を使う点がSEGの指導のポイントだろう。

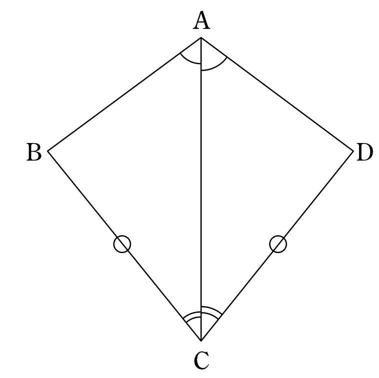
次々と生徒の言葉を引き出しつつ、∠DAC＝∠QPR、AD＝PQとなるような点Dを取ることで、二辺夾角相等により△ADC≡△PQRを証明し、かつ四角形ABCDが問の四角形と同じ条件になることから△ADC≡△ABCを言い、△ABC≡△DEFを証明。これで、3辺が等しい三角形が合同となる「三辺相等」の合同条件が証明できたことになる。

二角夾辺相等の合同条件を「背理法」を用いて証明

2回目の休けいが終わると、今度は、冒頭で生徒が合同になりそうだと予想していた3つ目の条件「2つの角とその間の辺が等しい」、すなわち「二角夾辺相等」の合同条件の証明に入っていく。

テキストに載っている問は、図のような四角形ABCD（∠BAC＝∠DAC、∠BCA＝∠DCA）において△ABC≡△ADCを証明せよというものである。

図 C



使えるのは、公理として提示された二辺夾角相等と、すでに証明した底角定理、三辺相等の3つのみだ。

「いずれも2つ以上の辺が等しいことが必要ですが、この場合はACが共通で等しいこと以外は分かりません。どうしたらいいでしょう」との問いかけに、生徒がいくつかアイデアを出すものの、いずれも前提となる条件を満たしそうもない。「では、他にどの辺が等しければ合同だと言えそうですか」「AB＝AD」「そうですね。それをどうやって示しますか」教室に沈黙が生まれる。しばらくすると、ある生徒が「なんだっけ、否定する？」「そう、背理法です」すると教室中が「あー」と大きな歓声に包まれる。こんなふうに答えに詰まったり、なかなか意見が出ないこともあるが、先生一人の考えで進めていくということはほぼない。こうして自分たち自身で考え抜いて答を出すという経験を積むことで、解法が身についていくのだろう。

何をどう否定するかについても、もちろん生徒の意見を聞きながら、生徒と一緒になって証明していく。

要点はこうだ。AB≠ADだとすると、ADの間もしくはADの延長線上のどこかに、AB＝AEとなる点Eが存在する。すると、△ABC≡△AEC（二辺夾角相等）となり、合同の対応角から∠BCA＝∠ECAとなる。ところがこの問の前提条件が∠BCA＝∠DCAであることから、∠ECA＝∠DCAとなり、AB≠ADという条件と矛盾する。したがって、背理法によりAB＝ADが証明でき、この四角形においては、△ABC≡△ADC（二辺夾角相等）が証明できた。

最後は、一般的な2つの三角形の二角夾辺相等の証明だ。∠A＝∠P、∠C＝∠R、AC＝PRを満たす△ABCと△PQRに対して、先程と同様に∠DAC＝∠QPR、AD＝PQとなる点Dを取れば△ADC≡△PQR（二辺夾角相等）が証明でき、四角形ABCDが問の四角形と同様になるため△ADC≡△ABCが言え、△ABC≡△PQRが証明できた。

授業時間は、休けい2回をはさんだ計3時間。この3時間で、まず二辺夾角相等から底角定理を証明し、この2つを使って三辺相等を証明。さらに二辺夾角相等と背理法を使って二角夾辺相等を証明することができた。

二辺夾角相等というたった一つの公理から、これだけの定理を導くことができることを生徒たちは体感したわけだ。出発点となる公理と証明された定理だけを使って新たな定理を証明していくという、数学の論理的な思考が徹底された授業であった。

補足：最初に行った底角定理の証明では角の二等分線を使ったが、実はその存在も証明が必要である。§4、§5といろいろな定理の証明を積み上げた後、実は最初の底角定理の証明がまずいという「どんでん返し」が待っている。生徒たちは最後に、角の二等分線の存在を前提としない別証明を考えることになるのだ。

中1でそこまでやるとは。SEG恐るべし……である。