SEG
中1数学
授業見学
レポート

論理をきちんと積み上げるために本質の実感を伴った理解を大切にする授業

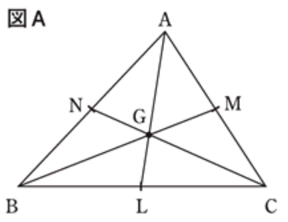
SEGは数学専門塾としてスタートしただけに、数学の指導力は高く評価されている。とりわけ、基本的な法則や事実から出発して、論理的に物事を構築していく授業は、数学という学問の本質に迫っていると言える。その姿勢は中学1年の授業でも同じだ。今回の授業は、「三角形の五心」を扱う冬期講習の最終日。厚紙や折り紙を使った実験により、生徒自身に実感を伴う気づきを促しつつ、これまでに学んだ知識から論理的に推論し、証明していく授業の醍醐味を味わっていただきたい。

厚紙の三角形で重心の意味を理解

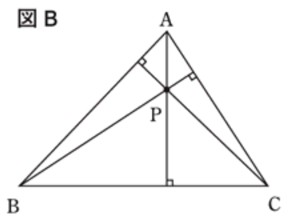
最終日の授業で扱うのは三角形の重心と垂心の2つ。すでに1～3日目の授業の中でどのような三角形に対しても外心、内心、傍心が存在することは証明済みだ。担当する迎健吾先生は、「今日の証明は面白いので楽しみにしておいてください」と前置きしてから、生徒に次のように質問を投げかけた。

「昨日までに習った外心は、外接円の中心という言い方もできますが、他の言い方もできることを覚えていますか」。すると、ある生徒が「各辺の垂直二等分線の交点」と答える。内心と傍心についてもそれぞれ生徒に確認した後、「外心、内心、傍心は三角形の特殊な直線3本の交点と言うことができました。重心と垂心も同じです。三角形の3つの頂点と対辺の中点を結ぶ線（中線）は1点で交わりますが、これを重心と言います（図A）。また、3つの頂点から対辺へ下した垂線の交点を垂心と言います（図B）」と最初に定義を説明した。

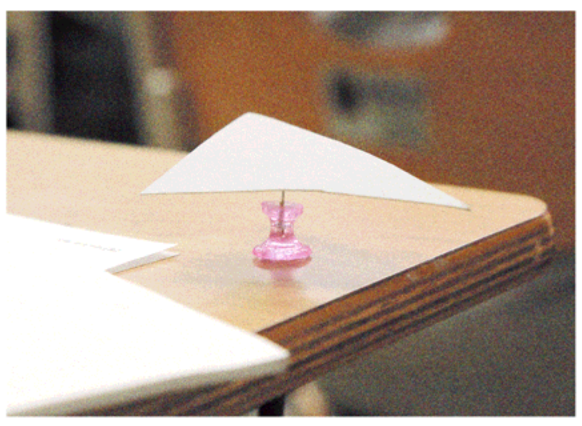
図A



図B



「昨日までに説明したように、3本の直線が1点で交わるのはとても不思議なことです。今回も重心、垂心がどんな三角形でも存在することを証明しましょう。重心から考えていきますが、実は、重心とは名前の通り、理論上は三角形をその1点で支えることができる点です。その証明へ入る前に、まずは工作をして確かめてもらいましょう」。そう言いながら迎先生は一人ひとりに厚紙とハサミを配った。自由な三角形を描いて切り抜き、3本の中線が1点（重心）で交わることを確認する。その後、大型の押しピンを渡し、机の上に立てた押しピンに三角形の重心を乗せて釣り合うかを確認させていく。



「さて、そろそろ重心の証明に入りましょう。3本の中線が1点で交わることがどんな三角形でも言えるためには、何を仮定とし、何を結論として証明を書けばいいでしょう」。先生の問いかけに、ある生徒が「AN＝BN、AM＝CMの2つを仮定して、結論としてBL＝CLを示す」と答える。「そうですね。昨日までと同じ考え方ですね。2本の中線BM、CNの交点をGとしたときに、このGがAからの中線上にあることを示せばよいです。つまり、AGを伸ばした直線と辺BCの交点LがBCの中点になっているということを示しましょう。では、各自で考えてみましょう」と先生。10分間のシンキングタイムがスタートした。

「少しだけヒントを与えます。先ほど、工作で確認したように重心は三角形の釣り合いの位置です。では、なぜ釣り合うのかを考えてみてください」。先生は机を回りながら、それぞれの生徒がどんな考え方をしているのかを、ノートをチェックしながら確認していく。

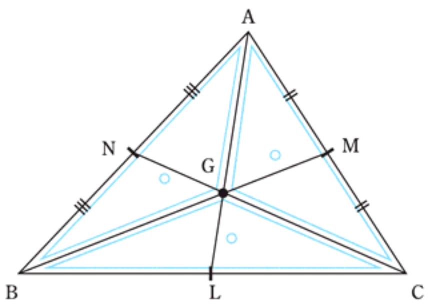
「三角形を、点ではなく線で支えることを考えると、実は中線でも釣り合います。だとすれば、なぜ釣り合うのか感覚的に分かりませんか」と促すと、「中線で二分された三角形の面積が等しい」と答えた生徒がいた。先生は「面積が等しいから釣り合うと言うためにはもっと厳密な証明が必要ですが、今回は省きます。ただ、面積が同じということを出発点にすれば、重心の存在が証明できてしまいます。これが証明の一つの方針になります」と説明し、休憩に入った。

2通りの方法で重心の存在を証明

休憩後、先生は三角形の図を指し示しながら「ABの中点をN、ACの中点をMとします。Nが中点だから成り立つ、面積が等しい三角形で証明のカギになるものはどれですか」と質問。「△ACG＝△BCG」と答えた生徒に「どうしてそれが言えますか」と問い返す。すると「△ACNと△BCNの面積が同じで、さらに△AGNと△BGNの面積も同じだから。同じものから同じものを引いた残りの面積が等しいから」と即答。先生は「そうですね」と受け、きちんとした証明を、数式と言葉で黒板に書いていく。

上の流れに加え、Mが中点なのだから同様に△BCG＝△BAGが成立し、最初の△ACG＝△BCGから△ACG＝△BAGであることを導き、最終的にBL＝CLを証明する形になっている（図A’）。

図A’



続いて、別解の解説に入っていく。「中点が2つあるとき、使いたい定理はないですか」「中点連結定理」「この定理の結論を覚えていますか」「NM//BC、BC＝2NM」「では、この平行線から何か言えることはないですか」。こういった生徒とのやり取りを通して、論理的に考えていくプロセスを巧みに示していく。「NG：GC＝1：2」「そう、GはNCを1：2に内分する点です。実は、この事実からすぐに証明ができてしまいます。では、どのように議論しましょうか」。すると、ある生徒から「同一法」という声が上がる。それを機に先生は、別解の証明を一気に、ただし丁寧に、図をふんだんに使いながら説明していく。

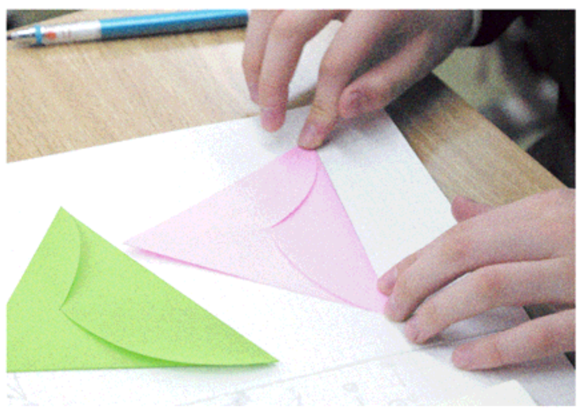
すなわち、LがBCの中点だと仮定すればNL//ACとなり、ALとCNの交点をHとすると、HもNCを1：2に内分する点になる。同じNCを1：2に内分する点なので、GとHは同一点である、という流れだ。

「昨日までは出てこなかった証明方法でしたが、面積ではなく、中点連結定理と、平行線と比の定理を用いるだけでも証明ができてしまうわけですね」と、重心の証明を終えた。

円の折り紙を使い不思議な性質を実感

続いて垂心の授業に移る。「垂心の証明方法はたくさんありますが、SEGではみんなが一人では絶対に気づかないであろう方法で証明をします。でもその前に実験をしてもらいます」。先生は円形の折り紙を配りながら、「円周上に任意に3点をとり、その3点を線で結び、その線に沿って3辺を折り返してみてください」と指示。

生徒たちはすぐに作業を進めていく。すると、どの生徒の円形の折り紙も折り返した円弧が1点で重なってしまう。生徒はみな不思議そうな顔をして自分の折り紙を見つめている。



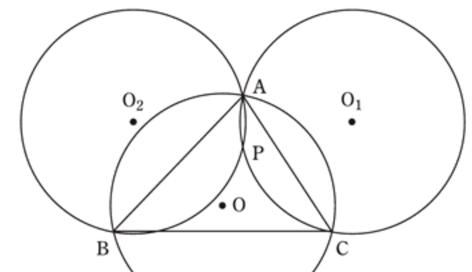
先生は△ABCとその外接円を描く。辺で折り返した円弧が1点で重なる様子を示し、「実はこの点と各頂点を結ぶとすべて対辺への垂線になります。つまり、この点が△ABCの垂心です。次の3時間目には、この奇妙な性質と絡めて三角形の3本の垂線が1点で交わることを証明します」と話し、2度目の休憩に入った。

知識をフル活用して垂心の存在を証明

「今までの方法だと、2本の垂線の交点が、もう1本の垂線上にあることを示すという方針が思いつきますが、今回は、『2つの円弧を折り返した交点Pが垂線上にある。つまり、点Pと各頂点を結んだ線が各頂点の対辺と垂直になっていることを示し、そのことから各頂点からの垂線が1点のPで交わっている』という証明をしていきます。垂心の存在証明でこの方法は絶対に思いつかないでしょう」と言う先生は、何だか楽しそうだ。

この証明のポイントは、円形の折り紙を使ったことにある。「もともとの円弧を折り返した円弧は、円の一部ですよね。その円の半径は、もともとの折り紙、つまり△ABCの外接円と半径が同じです。それを仮定にします」。こう言って、△ABCとその外接円、さらにAB、ACを折り返し線とする、△ABCの外接円と同じ半径の円O_1、O_2を黒板に描いていく（図B’）。

図B’

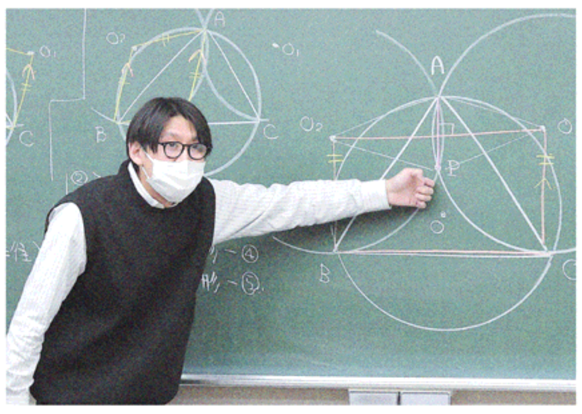


テキストにはそれを証明していくための誘導問題が載っており、その流れに沿って解説を加えていく。最初に①AP⊥BCを示し、次に②BP⊥AC（同様にCP⊥AB）を示すことで、3つの頂点からの垂線上にPがあることから、3本の垂線が1点のP（垂心）で交わることを証明するという流れになっている。先生は補助線を引いて生徒の気づきを促し、その都度丁寧に色分けして図示して納得させながら、証明を丁寧に書いていく。興味があれば、実際に図を描いて証明を試みてほしい。

「これにてどんな三角形に対しても垂心が存在することが証明できました。ですが、実はまだ、円の折り紙で折り返した3つの円弧が1点で交わることは証明できていません。でも、2つの円弧の交点が三角形の垂心になったということを用いればもう簡単ですよね」。

最後にこの証明を確認し、迎先生は、次のように締めくくった。

「これで三角形の五心の存在がすべて証明できました。この五心の証明は、今まで幾何の授業で習ってきたことの集大成とも言えるものです。3学期からは代数の勉強に入りますが、こうして一つずつ論理的に説明していく能力は代数でも求められますから、冬休み中にしっかり復習しておいてください」。



ただ与えられた問題を解くだけでなく、工作、実験などを通して図形の性質を実感することで、意欲的に問題に取り組むことができる。また、すでに分かっていることから順番に積み上げていくことで、中学1年生といえども論理を大事にする授業に、SEGの真骨頂を見た気がした。

SEG中1数学

受講生の声

冬期講習に参加しているみなさんは、SEGの数学の授業に、どんな魅力を感じているのでしょうか。実際にお話をうかがいました。

学校の授業と比較できて楽しい

SEGでは学校で触れないような内容に触れてくれたり、同じような問題でも学校とは違う考え方をしたりするので、学校と比較しながら授業を受けることができて楽しいです。同じ問題でもいろいろな証明方法があることを学べるし、一つひとつ丁寧に積み上げていくので分かりやすいです。

◆S.S. さん（筑駒）

自由な発想ができる点が魅力です

SEGでは自由な発想ができます。たとえば今回の冬期講習で学んだ傍心にしても、傍心というものがあるというだけで終わらずに、そこからさらに発展させた解説をしてもらえます。三角形の辺の長さだけでその三角形の面積が求められるという話にまで発展させてくれ、数学への興味がどんどん高まっています。

◆S.Y. さん（女子学院）

すべてに通用する思考力が身につく

SEGで数学を学んだことで、公式を覚えなくても解けるという感覚が生まれました。こうしたら解けるかもしれないと考えることで、思考力を養えている気がして、苦手だった数学が得意科目になりました。この思考力は数学だけでなく、他科目にも通用するものだと思います。

◆M.F. さん（桐光学園）

数学の醍醐味を味わうことができる

先生の解説が面白いのに加え、どれだけ速く解くか、どれだけきれいに解くかを競い合うような雰囲気も面白いと思っています。一つ証明できれば、そこから一気にすべて証明できるような、数学の醍醐味を味わうことができます。SEGの数学は、一度入り込んだら抜けられない“沼”です。

◆H.M. さん（巣鴨）