

数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第48回

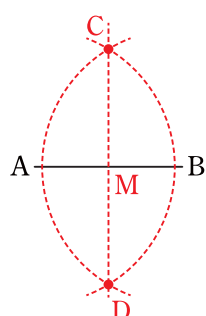
3本の平行線上に頂点のある相似な三角形を描こう

今回は、与えられた三角形と相似な三角形を、各頂点が与えられた3本の平行線上にあるように作図することにチャレンジしてもらいます。

三角形の3頂点を通る円の作図

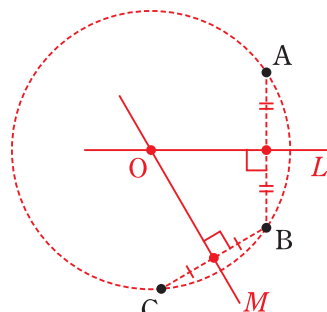
まずは、線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。

線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっており、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事(2016年4月21日付)をご覧ください。



次に、一直線上にない3点A、B、C

が与えられているとき、これらの3点A、B、Cを通る円をコンパスと定規を用いて描く方法は、例えば以下のようになります。右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを、上で解説したように描きます。



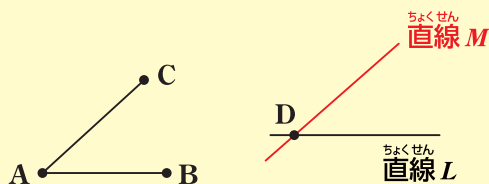
すると、LとMの交点Oが3点A、B、Cを通る円の中心になるので、Oを中心とし半径OAの円を描けばよいことになります。証明を知りたい人は第45回の記事(2019年9月19日付)をご覧ください。

等しい角の作図

さて、チャレンジ問題の前に、問題を1つ考えてもらいましょう。

問題1

線分AB、線分AC、直線L、L上の点Dが与えられているとき、Dを通る直線(Mとします)で直線Lとのなす角が線分ABとACのなす角と等しくなるものの1つをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

「角が等しい」ことを証明する方法の1つは、三角形がぴったり重なることを利用することでした。

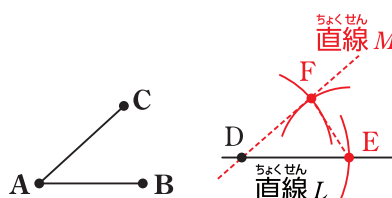
描き方

点Dを中心とし半径ABの円を描き、直線Lとの交点のうちの

1つをEとします。

次に、点Dを中心とし半径ACの円Dと点Eを中心とし半径

BCの円Eを描き、円Dと円Eの交点のうちの1つをFとします。最後に、2点D、Fを通る直線DFを描けば、その直線DFが求めるものになっています。



証明

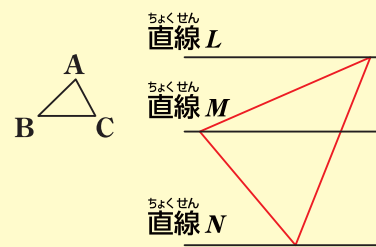
図の描き方から、 $AB = DE$ …①、 $AC = DF$ …②、 $BC = EF$ …③です。「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、①②③より、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ はぴったり重なります。よって、ABとACのなす角とDEとDFのなす角が等しいとわかります。したがって、直線DFが求める直線Mであることがわかりました。

3本の平行線上に頂点のある相似な三角形を描こう

では、今回のチャレンジ問題です。本文の記事と **問題1** がカギになります。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

右の図の三角形ABCと3本の平行線L、M、Nが与えられているとき、平行線L、M、Nの上に1つずつ頂点をもつ三角形ABCと相似な三角形のうちの1つをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

どの相似条件を使うのかを考えましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角



図2 錯角

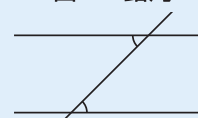
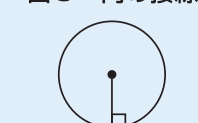


図3 円の接線



図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。