企画・構成｜科学的教育グループ SEG®　　バックナンバーは右記アドレスにて公開中！＞ http://www.seg.co.jp/

数学の世界をのぞいてみよう！

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第47回 円の接線と相似な三角形を利用した作図

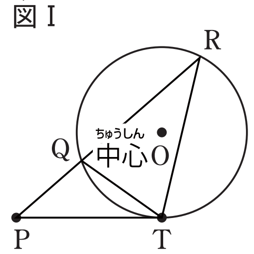
執筆・編集：佐藤 太郎

今回は、円の接線と相似な三角形を利用した作図について考えていきます。

円の接線と相似な三角形

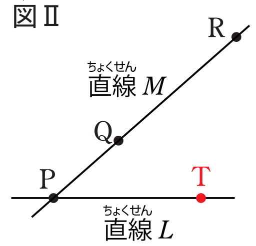
右の図Ⅰにおいて、PQ×PR＝PT×PT（このとき△PQTと△PTRは相似になります）であるとき、直線PTは円Oの点Tにおける接線でした。証明を知りたい人は第43回の記事(2019年7月18日付)を見てください。

図Ⅰ



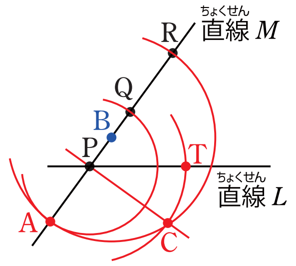
また、右の図Ⅱにおいて、3点P、Q、Rが与えらえているとき、PQ×PR＝PT×PTとなる点Tの1つをコンパスと定規を用いて描く方法は、例えば以下のようになります。

図Ⅱ



まず、点Pを中心とし半径PQの円Pを描きます。そして、直線Mと円Pの交点のうち、Qではない方をAとします。

次に線分ARの中点Bを描き（中点の描き方は、第5回の記事（2016年5月19日付）を見てください)、点Bを中心とし半径BAの円Bを描きます。



さらに点Pを通り直線Mと垂直な直線を描き、その直線と円Bとの交点の1つをCとします（△APCと△CPRが相似になるので、PA×PR＝PC×PCとなります）。

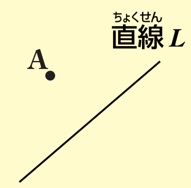
最後に、点Pを中心とし半径PCの円と直線Lとの交点の1つをTとすると、このTが求める点になります。証明を知りたい人は第44回の記事（2019年8月15日付）を見てください。

直線に関して対称な点を描いてみよう

さて、チャレンジ問題の前に、問題を一つ考えてもらいましょう。

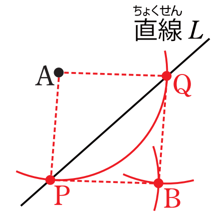
問題1

直線Lと点Aが与えられているとき、線分ABと直線Lが垂直になり、線分ABの中点が直線L上にあるような点Bをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう（このとき、点Bは直線Lに関して点Aと対称であるといいます）。

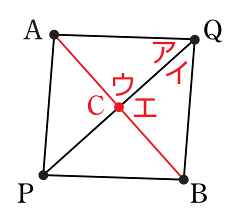


考え方 ひし形を利用しましょう。

描き方 直線L上に点Pをとり、点Aを中心とし半径APの円Aを描きます。そして、円Aと直線Lとの交点のうちPでない方をQとします。さらに、点Pを中心とし半径APの円Pと点Qを中心とし半径APの円Qを描き、円Pと円Qの交点のうちAでない方をBとすると、このBが求める点になっています。



証明 図の描き方から、AP＝AQ＝PB＝QB…①となります。ABとPQの交点をCとおき、図のように角ア、イ、ウ、エをおきます。△APQと△BPQにおいて、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①とPQが共通より、△APQと△BPQはぴったり重なります。よって、対応する角は等しいので、角ア＝角イ…②です。



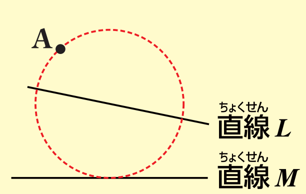
また、①より、AQ＝BQ…③です。△ACQと△BCQにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、②③とCQが共通より、△ACQと△BCQはぴったり重なる…④とわかります。④より、対応する角は等しいので、角ウ＝角エ、すなわち、ABとPQは垂直…⑤です。④より、対応する辺は等しいので、AC＝BC…⑥です。⑤⑥から、この描き方で正しく図が描けていることが証明できました。

円の接線と相似な三角形を利用した作図

それでは今回のチャレンジ問題です。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

右の図のように直線L、M、点Aが与えられているとき、L上に中心があり、Aを通り、Mに接する円を1つコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

本文の記事と 問題1 をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

図2 錯角

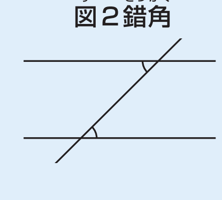
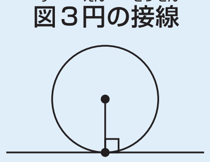


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。