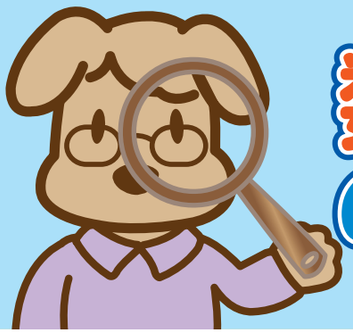


数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

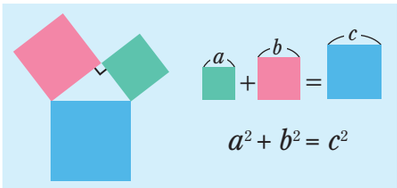
コンパスと定規で描ける図形の世界

～ユークリッド幾何の世界～

第３回 中点が描けることって、どう証明するの？

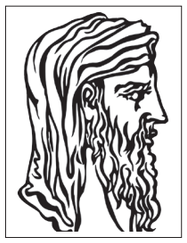
数学は、数や図形について調べていく学問です。そして、どうしてそうなるのかという理由をとことん突き詰め、簡単な原理からすべてのことを説明していきます（証明と呼ばれています）。

その証明をはじめたのが、2000年以上昔の古代ギリシャ人たちでした。それ以前の古代バビロニアや古代エジプトでも、社会生活で必要な数の計算が行われ、測量や建築で必要になる垂直を決めるために直角三角形の三辺の長さは求めていました。しかし、これらの文明では、計算して得た答えを利用した痕跡は残っていても、理由を突き詰めた痕跡は残っていません。理由を突き詰め、簡単な原理からすべてを証明することをはじめた人たちこそが、古代ギリシャ人たちだったのです。ここから数学がはじまりました。



この「コンパスと定規の幾何」の記事の主役は、その古代ギリシャ人のユークリッドです。

ユークリッドは、古代ギリシャの数学研究を集大成し、『原論』という本にまとめました。その『原論』の図形部分（ユークリッド幾何と呼ばれています）では、コンパスと定規で描ける図形にはどのようなものがあるかが調べられています。この記事でも、みなさんと一緒に、コンパスと定規で描ける図形について調べていきます。


ユークリッド

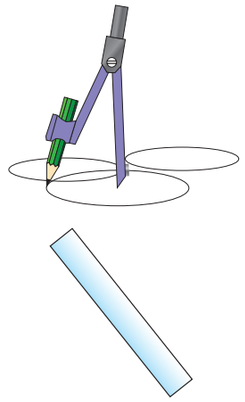
まず最初に、証明のための最も根本的な原理と図を描くときに注意しなければいけないことを確認しておきましょう。

〈根本原理〉

・定規で、２点を通る直線が引ける。
・コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
・三辺の長さが互いに等しい三角形はぴったり重なる（３つの角も互いに等しい）。

〈注意〉

・定規は目盛りがないものとします。直線を引くこと以外には使えません。



線分の中点をどう描こう？

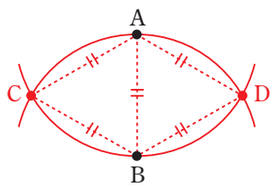
今回は、コンパスと定規で図形を描くときに、線分の中点をどうやって描くかについて考えます。線分の中点を描くには、実は、ひし形（四辺の長さがすべて等しい四角形のことです）が描ければよいので、まずはひし形の描き方から考えることにしましょう。

問題

コンパスと定規で、ひし形を描いてみましょう。

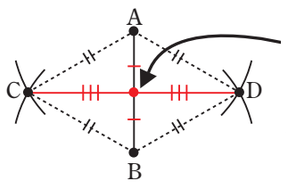
いろいろな描き方があるので、以下は１つの例です。

描き方 まず2点A、Bを描き、Aを中心とし半径ABの円とBを中心とし半径ABの円を描きます。そして、その2つの円の交点をC、Dとします。すると、四角形ACBDがひし形になります。



証明 図の描き方から、AC=AD=AB=BC=BDとなり、四角形ACBDの四辺の長さは等しいので、四角形ACBDはひし形です。

さて、ひし形を利用すると、線分の中点を描くことができます。なぜなら、ひし形の対角線は互いの中点で交わるからです。



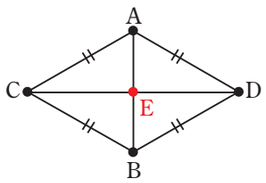
線分ABに対し、ひし形ACBDを描き、対角線CDを引くと、ABとCDの交点がABの中点になる。

では、この「ひし形の対角線が互いの中点で交わる」という性質は、「三辺の長さが互いに等しい三角形はぴったり重なる」という根本原理から証明できることなのでしょうか？

最初に書いたように、数学は、どうしてそうなるかという理由、すなわち、根本原理が何なのか、根本原理から証明できることなのかということに、とことんこだわっていくのです。

ひし形の対角線が互いの中点で交わることの証明

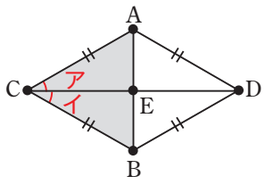
線分ABに対するひし形ACBDにおいて、ABとCDの交点をEとおきましょう。もしも△ACEと△BCEもぴったり重なるなら、AE=BE、すなわち、EがABの中点といえます。



そこで、△ACEと△BCEがぴったり重なることを証明しようと考えてみます。ところが、この２つの三角形がぴったり重なることを証明するには、三辺が互いに等しくなくてはいけないので、先にEが中点、すなわち、AE=BEがわかっていなくてはいけません。

ぴったり重なることから、中点であることが証明できる。でも、ぴったり重なることを証明するには、中点であることが証明できていないといけない。これでは、どうどうめぐりになってしまい証明になりません。では、どうすればよいのでしょう？

まず、△ACDと△BCDは、三辺が互いに等しいので、ぴったり重なります。したがって、図の角アと角イは等しくなります（角ア＝角イ）。すると、△ACEと△BCEでは、ACとBC、CEとCEの２組の辺とその間にある角アと角イが等しくなっているとわかります。



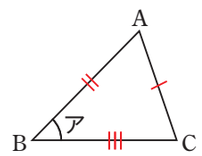
実は、このとき２つの三角形はぴったり重なることが、根本原理から証明できるのです（このことが証明できれば、AE=BEが証明できるので、ひし形の対角線が中点で交わることも証明できますね）。

ということで、今回のチャレンジ問題です。頑張って考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

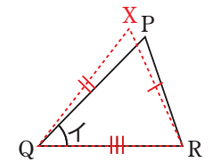
「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい）」ことを、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（３つの角も互いに等しい）」という根本原理を使って証明してください。

考え方 ２つの三角形を△ABCと△PQRとし、AB=PQ、BC=QR、角ア=角イ（右の図）とします。



このとき、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことを使って、△ABCと△PQRがぴったり重なることを証明したいわけです。

そこで、△ABCと三辺が互いに等しい△XQRを、一辺が△PQRの辺QRと重なり、点Xが直線QRに対して点Pと同じ側にあるように描いてみると……。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。