



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

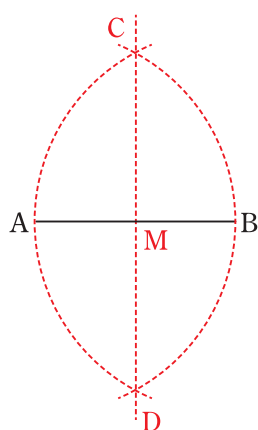
第45回

相似な三角形を描いてみよう2

今回は、相似な三角形の作図について考えます。

線分の中点や線分の垂直二等分線の作図

まずは、線分の中点や線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっており、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事(2016年4月28日付)、第5回の記事(2016年5月19日付)を見てください。

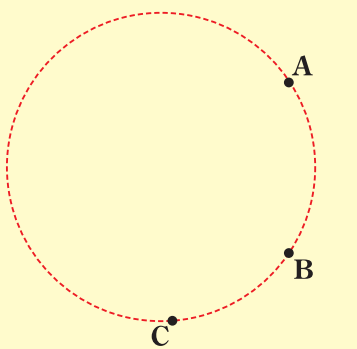


一直線上にない3点を通る円の作図

それでは、次の問題を考えてみてください。

問題1

一直線上にない3点A、B、Cが与えられています。これらの3点を通る円をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



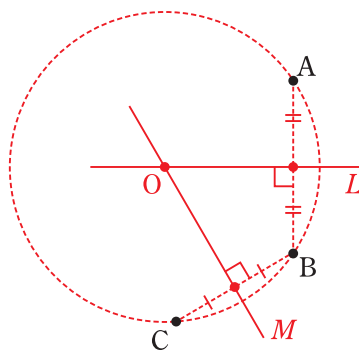
考え方

描きたい円の中心は3点A、B、Cからの距離が等しい点です。

描き方

右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを、本文の解説のように描きます。

そして、LとMの交点Oを中心とし、半径OAの円を描けばその円は点B、Cも通ります。



証明

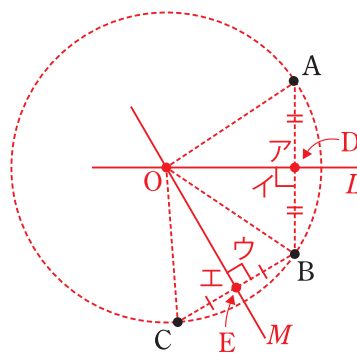
図のように、角をA、イ、ウ、エとおき、ABとLの交点をD、BCとMの交点をEとおきます。すると、図の描き方から、AD=BD…①、角A=角イ…②、BE=CE…③、角ウ=角エ…④です。

△OADと△OBDにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①②とODは共通より、△OADと△OBDはぴったり重なります。よって、OA=OB…⑤です。

△OBEと△OCEにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、③④とOEは共通より、△OBEと△OCEはぴったり重なります。よって、OB=OC…⑥です。

⑤⑥より、OA=OB=OCなので、点Oを中心とし半径OAの円は点B、Cも通るとわかりました。

したがって、この描き方で正しく図が描けていることが証明できました。

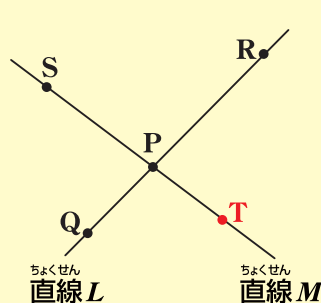


相似な三角形を描いてみよう

それでは今回のチャレンジ問題です。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

2直線L、Mが交わる時、その交点をPとし、直線L上にQ、P、Rの順になるように点Q、Rをとり、直線M上に点P以外の点Sをとります。このとき、直線M上にPQ×PR=PS×PTとなる点Tをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

結論のPQ×PR=PS×PTから考えると、ある2つの三角形が相似になるように点Tをとればよいことがわかります。問題1も活用してみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

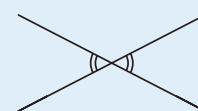


図2 錯角

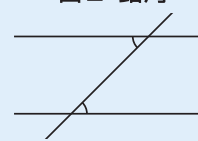
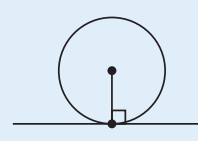


図3 円の接線



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。