



数学の世界をのぞいてみよう!

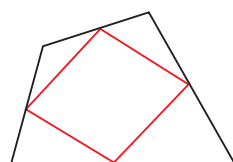
執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第37回 四角形の4辺それぞれに頂点があるひし形を描こう

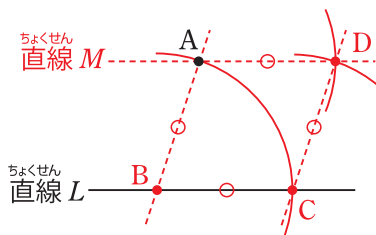
今回は、四角形の4辺のそれぞれの上に1つずつ頂点があるひし形の作図にチャレンジしてもらいます。



平行線と線分比の関係

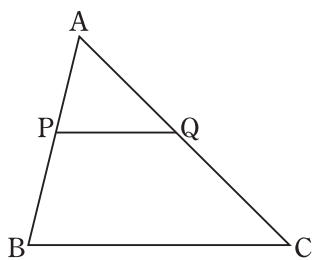
ひし形とは4辺の長さが等しい四角形のことです。平行線を描くことにも利用される基本的な形の四角形でした。今回のチャレンジ問題では、四角形の4辺上に頂点があるひし形を、平行線を利用して描くことになります。そこで、ひし形を利用した平行線の描き方を確認しておきましょう。

直線LとL上にない点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法のひとつは、右の図のようにひし形ABCDを描くことでした。



今回の作図でも、この平行線の作図のお世話になるので、しっかり理解しておきましょう。証明を知りたい人は、第34回の記事(2018年10月18日付)をご覧ください。

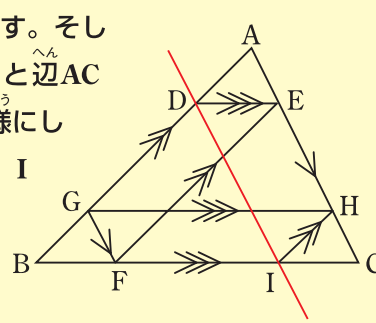
また、今回のチャレンジ問題では、第31回(2018年7月19日付)の記事であつた三角形の辺の比と平行に関する性質「△ABCの辺AB、AC上に点P、Qを、 $AP:PB=AQ:QC$ となるようにとると、BCとPQが平行になる」(証明を知りたい人は、第31回の記事を見てください)や平行線と線分比の原理「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」も必要になります。



これらの性質に慣れてもらうために、問題をひとつ考えてもらうことにしましょう。

問題1

△ABCの辺AB上に点Dをとります。そして、Dを通り辺BCと平行な直線と辺ACとの交点をEとします。以下、同様にし、右の図のように点F、G、H、Iをとります。このとき、DIとACが平行になることを証明してみましょう。



考え方

「平行線と線分比の原理」と「三角形の辺の比と平行に関する性質」を利用しましょう。

証明

問題の仮定から、 $DE \parallel BC$ (DEとBCは平行)…①、 $EF \parallel AB$ …②、 $FG \parallel CA$ …③、

$GH \parallel BC$ …④、 $HI \parallel AB$ …⑤です。

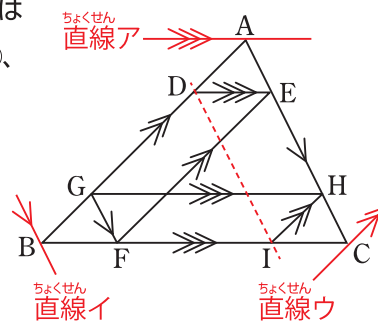
右の図のように、点A、B、Cを通り三角形の向かいの辺と平行な直線ア、イ、ウを引きます。

よって、直線ア \parallel BC…⑥、直線

イ \parallel CA…⑦、直線ウ \parallel AB…⑧で

す。「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の比は常に等しい」ので、①⑥より $AD:DB=AE:EC$ 、②⑧より $AE:EC=BF:FC$ 、③⑦より $BF:FC=BG:GA$ 、④⑥より $BG:GA=CH:HA$ 、⑤⑧より $CH:HA=CI:IB$ とわかります。これら5つの比の式から、 $AD:DB=CI:IB$ …⑨です。

ここで、「三角形の辺の比と平行に関する性質」を用いることで、⑨より $DI \parallel AC$ です。以上で証明が終わりました。

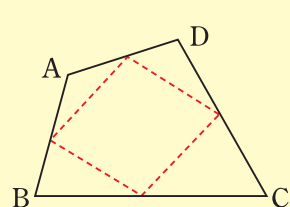


四角形の4辺上に頂点があるひし形を描こう

それでは、今回のチャレンジ問題です。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

与えられた四角形ABCDの頂点をのぞく4辺のそれぞれの上に1つずつ頂点があるひし形をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1でやったように、「平行線と線分比の原理」と「三角形の辺の比と平行に関する性質」をうまく利用します。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。

図1 対頂角

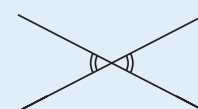


図2 錯角

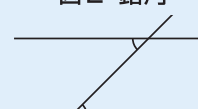
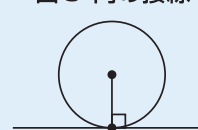


図3 円の接線



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。