



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第33回

相似な三角形を利用する作図

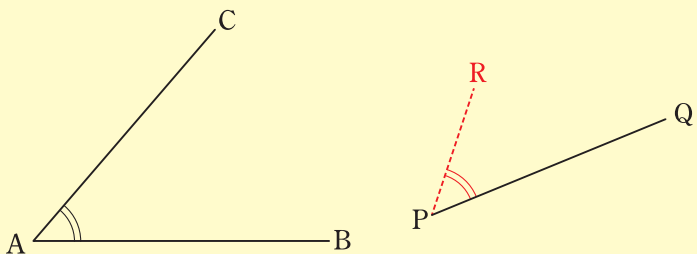
今回は、相似な三角形を利用した作図にチャレンジしてもらいます。

相似な三角形を描くには

まず、相似な三角形をコンパスと定規を用いて描くにはどうすればよいかを考えてみましょう。どんな三角形が相似になるかを思い出してみると、例えば、「二角が互いに等しい三角形は相似である」のでした。このことから、二角が等しくなるように三角形を描くことができればよいとわかります。そこで、コンパスと定規を用いて等しい角を描くにはどうすればよいかを考えておくことにしましょう。

問題 1

線分ABと線分ACが、点Cが直線AB上にないように与えられていて、さらに線分PQが与えられているとします。このとき、ABとACの間の角がPQとPRの間の角と等しくなるような点Rをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

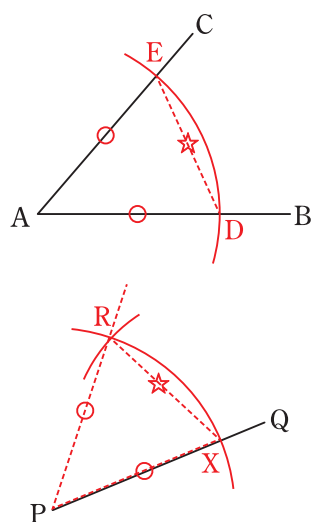


考え方

三角形がぴったり重なることを利用しましょう。

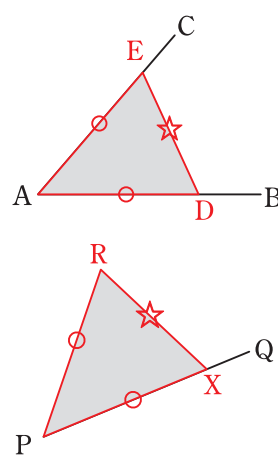
描き方

まず、線分AB上に点Dを、線分ADが線分ACや線分PQよりも短くなるようにとり、点Aを中心とし半径ADの円Aを描きます。そして、線分ACと円Aとの交点をEとしておきます。次に、点Pを中心とし、半径ADの円Pを描き、線分PQとの交点をXとします。最後に、点Xを中心とし半径DEの円Xを描き、円Xと円Pとの2つの交点のうちの一つをRとすると、PXとPRの間の角がABとACの間の角と等しくなります。



証明

△ADEと△PXRにおいて、図の描き方から、AD = PX…①、AE = PR…②、DE = XR…③です。「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①②③より、△ADEと△PXRはぴったり重なるとわかります。したがって、ADとAEの間の角とPXとPRの間の角もぴったり重なります。ここで、ABとACの間の角とADとAEの間の角は同じ角で、PQとPRの間の角とPXとPRの間の角も同じ角なので、ABとACの間の角とPQとPRの間の角が等しいことが証明できました。したがって、この描き方で正しく図が描けていることがわかりました。

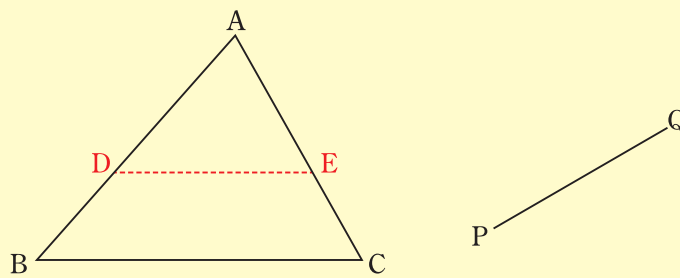


相似を利用して作図してみよう

最初に書いたように、今回のチャレンジ問題では、相似を利用した作図について考えてもらいます。問題1の結果を利用して相似な三角形を描き、その相似をうまく利用して考えてみましょう。相似を使って解決できた人は、相似を使わない描き方も考えてみるとよいでしょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

△ABCと辺BCより長さが短い線分PQが与えられています。このとき、線分DEを、点Dが辺AB上に、点Eが辺AC上にあり、DEの長さとPQの長さが等しく、DEとBCが平行になるように、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

まずは、相似を利用する方針を考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい (図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい (図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である (図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。

図1 対頂角



図2 錯角

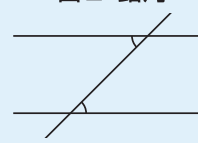
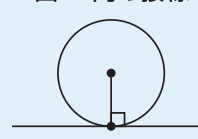


図3 円の接線



図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。