



# コンパスと定規で描ける図形の世界

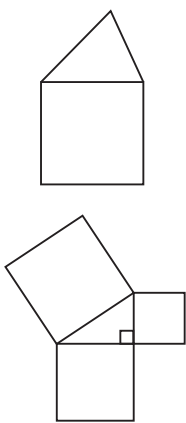
……ユークリッド幾何の世界……

第20回

## ピタゴラスの定理 その2

今回も、前回に引き続き、ピタゴラスの定理の証明について考えていきます。まず、言葉の確認をしておきます。「三角形の辺の上の正方形」とは、右の図のように、「三角形の辺を一つの辺とする三角形の外側にくっつけている正方形」のこととします。

このとき、ピタゴラスの定理とは、「直角三角形の直角をはさむ二辺の上の2つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい」という定理です。この定理の前回は違う証明について考えていきましょう。

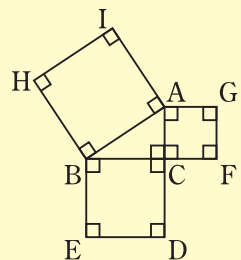


### まずはぴったり重なる三角形に注目しよう

ピタゴラスの定理を証明する準備として、次の問題を考えてみてください。

#### 問題1

CAとCBの間の角が直角の△ABCと三辺BC、AC、ABの上の正方形BCDE、ACFG、ABHIが与えられているとき、△ABEと△HBCがぴったり重なることを証明してみましょう。



**考え方** まずは、三角形がぴったり重なるためにはどの条件を使えばよいかを考えましょう。

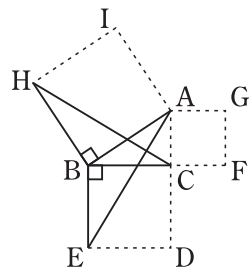
**証明** △ABEと△HBCにおいて、四角形BCDEは正方形なので、BCとBEの間の角は直角…①、BE=BC…②です。四角形ABHIは正方形なので、BAとBHの間の角は直角…③、BA=BH…④です。

①より、BAとBEの間の角=BAとBCの間の角+90度…⑤

③より、BHとBCの間の角=BAとBCの間の角+90度…⑥

⑤⑥より、BAとBEの間の角=BHとBCの間の角…⑦

②④⑦より、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABEと△HBCはぴったり重なります。



### 底辺が等しく平行線にはさまれた三角形

第16回(4月20日付)の記事で、「2つの平行四辺形が共通の底辺

をもち、その底辺の向かい側の辺が同一直線上にあるならば、2つの平行四辺形の面積は等しい」ことをあつかいました。

また、第17回(5月18日付)の記事で、「平行四辺形を対角線で2つの三角形に分けると、その2つの三角形はぴったり重なり、面積は等しい」ことをあつかいました。(証明などを詳しく知りたい方は、第16回、第17回の記事を読んでみてください。)

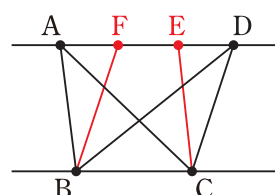
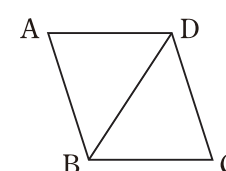
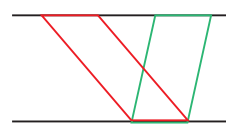
これらのことを用いると、「2つの三角形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の頂点が底辺と平行な同一直線上にあるならば、2つの三角形の面積は等しい」ことが簡単に証明できます。

△ABCと△DBCは底辺BCが共通で、頂点AとDを通る直線ADは辺BCと平行だとします。点Cを通り辺ABと平行な直線と直線ADの交点をEとすると、四角形ABCEは平行四辺形になります。

点Bを通り辺CDと平行な直線と直線ADとの交点をFとすると、四角形BCDFは平行四辺形になります。

「2つの平行四辺形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の辺が同一直線上にあるならば、2つの平行四辺形の面積は等しい」ことから、平行四辺形ABCEと平行四辺形BCDFの面積は等しいとわかります。

さらに、「平行四辺形を対角線で2つの三角形に分けると、その2つの三角形はぴったり重なり、面積は等しい」ことから、△ABCと△DBCの面積が等しいことがわかります。

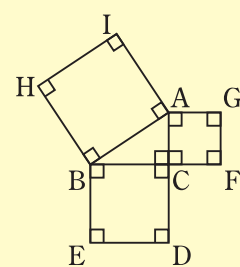


### ピタゴラスの定理を証明しよう

では、**問題1**の結果と「2つの三角形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の頂点が底辺と平行な同一直線上にあるならば、2つの三角形の面積は等しい」ことを利用して、ピタゴラスの定理を証明してみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

#### チャレンジ問題

CAとCBの間の角が直角の△ABCの直角をはさむ二辺の上の正方形BCDEと正方形ACFGの面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形ABHIの面積と等しいことを、面積を数値で表す考え方を使わずに、証明してみましょう。



**考え方** 「2つの三角形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の頂点が底辺と平行な同一直線上にあるならば、2つの三角形の面積は等しい」ということを**問題1**の三角形をどう結び付けるかを考えてみましょう。証明では、面積を数値で表す考え方、「三角形の面積が底辺×高さ÷2」や「長方形の面積が底辺×高さ」は使ってはいけないことに注意しましょう。

### 証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするとき使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

#### 根本原理

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。
- ・コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる(残りの辺と角も互いに等しい)。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。

- ・対頂角は等しい(図1)。
- ・2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- ・三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ・ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結び半径と垂直であるならば接線である(図3)。

**図を描くときの注意**

- ・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

図1 対頂角



図2 錯角

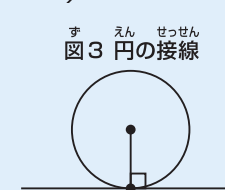


図3 円の接線

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。