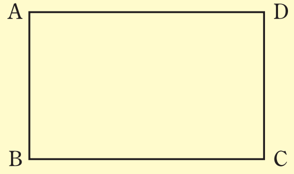
数学の世界をのぞいてみよう!

チャレンジ問題〔解答・解説〕

「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、6面をご覧ください。

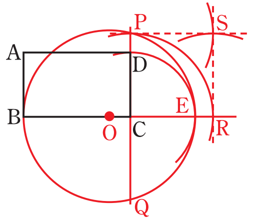
企画・構成 | 科学的教育グループ SEG®

下の図の長方形ABCDが与えられているとき、長方形ABCDと同じ面積の正方形をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



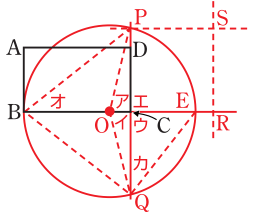
描き方

線分の中点や、ある直線上の点を通りその直線に垂直な直線の描き方は本文のように描くとします。



まず、辺BCのCの方への延長線を描き、点Cを中心とする半径CDの円Cを描きます。そして、BCのCの方への延長線と円Cの交点をEとし、本文のように線分BEの中点Oを描きます。次に、辺CDを含む直線CDを描き、点Oを中心とする半径BOの円Oを描きます。そして円Oと直線CDとの交点を図のようにP、Qとします。さらに、点Cを中心とする半径CPの円とBCのCの方への延長線との交点をRとし、点Pを中心とする半径CPの円Pと点Rを中心とする半径CRの円Rを描きます。そしてその交点のうちCでない方をSとすると、CPSRが求める正方形になります。

証明



図のように、角をア、イ、ウ、エ、オ、カとおきます。図の描き方から、CP＝CR＝PS＝RS…①、CD＝CE…②です。また、ABCDは長方形なので、角ア＝90度…③です。

「３点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である」ことと③から、角イ＝180度－角ア＝180度－90度＝90度、同様にして、角エ＝90度、角ウ＝90度なので、まとめると、角ア＝角イ＝角ウ＝角エ＝90度…④です。

△COPと△COQにおいて、「斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる」ことから、OP＝OQ（半径）、OC共通と④より、△COPと△COQはぴったり重なるとわかり、CP＝CQ…⑤です。

△CBPと△CQEにおいて、「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、弧EPの中心角の半分である円周角オとカは等しいとわかり、角オ＝角カ…⑥です。「二角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、④⑥より△CBPと△CQEは相似とわかり、その対応辺の比が等しいことから、CB：CP＝CQ：CE、すなわち、CP×CQ＝CB×CE…⑦です。ここで、④より角エ＝90度…⑧、①よりCPSRはひし形…⑨なので、⑧⑨よりCPSRは正方形です。

②⑤⑦より、CP×CP＝CB×CDなので、正方形CPSRの面積＝長方形ABCDの面積とわかり、求める正方形が正しく描けていることがわかりました。