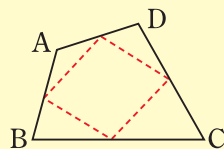




与えられた四角形ABCDの頂点をのぞく4辺のそれぞれの上に1つずつ頂点があるひし形をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



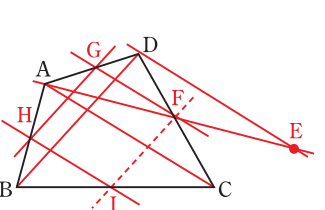
描き方

以下、平行線は本文の記事にあるようにして引きます。まず、Dを通りACと平行な直線を引き、その直線上のBDに対しCと同じ側に、 $BD = DE$ となるような点Eをとります。

次に、直線AEを引き、CDとの交点をFとします。そして、Fを通りACと平行な直線を引き、ADとの交点をGとし、Gを通りBDと平行な直線を引き、ABとの交点をHとし、Hを通りACと平行な直線を引き、BCとの交点をIとします。最後に、直線FIを引くと、四角形FGHIが求めるひし形になっています。

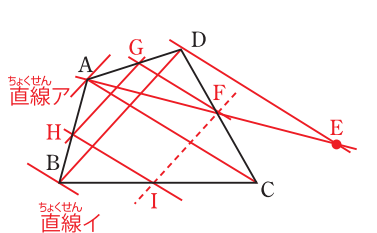
証明

図の描き方から、 $BD = DE$ …①、 $DE \parallel AC$ …②、 $FG \parallel AC$ …③、 $GH \parallel BD$ …④、



$HI \parallel AC$ …⑤です。右の図のように、点Aを通りBDと平行な直線ア、点Bを通りACと平行な直線イを引きます。よって、直線ア \parallel BD…⑥、直線イ \parallel AC…⑦です。

「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の比は常に等しい」ので、②③より $AF : AE = AG : AD$ …⑧、②③より $CF : CD = AG : AD$ …⑨、④⑥より $AG : AD = AH : AB$ …⑩、⑤⑦より $AH : AB = CI : CB$ …⑪です。⑨⑩⑪より $CF : CD = CI : CB$ なので、「三角形の辺の比と平行に関する



性質」を用いることで、 $FI \parallel BD$ …⑫です。③⑤より $FG \parallel HI$ 、④⑫より $GH \parallel FI$ なので、FGHIは平行四辺形…⑬とわかります。「二辺の比とその間の角が等しい三角形は相似」なので、ADとAEの間の角が共通なことから⑧より、 $\triangle ADE$ と $\triangle AGF$ は相似…⑭、ADとABの間の角が共通なことから⑩より、 $\triangle ADB$ と $\triangle AGH$ は相似…⑮です。⑭より $AG : AD = GF : DE$ …⑯、⑮より $AG : AD = GH : DB$ …⑰なので、⑯⑰より $GF : DE = GH : DB$ …⑱です。よって、①⑱より、 $GF = GH$ …⑲です。「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ので、⑬より $FG = HI$ …⑳、 $GH = FI$ …㉑であり、⑲⑳㉑より四角形FGHIの4辺すべてが等しいとわかります。したがって、FGHIはひし形です。以上で、図が正しく描けていることが、証明できました。