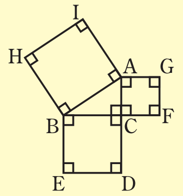
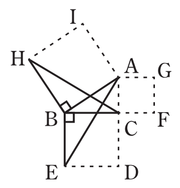
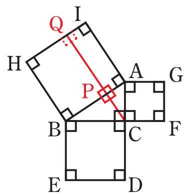
CAとCBの間の角が直角の△ABCの直角をはさむ二辺の上の正方形BCDEと正方形ACFGの面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形ABHIの面積と等しいことを、面積を数値で表す考え方を使わずに、証明してみましょう。



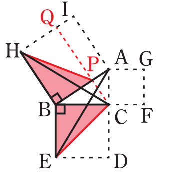
証明 まず、問題の前提条件をまとめておくと、△ABCにおいて、CAとCBの間の角は直角…①、正方形BCDEの4つの内角はすべて直角…②、正方形ACFGの4つの内角はすべて直角…③、正方形ABHIの4つの内角はすべて直角…④です。また、問題1の結果より、△ABEと△HBCはぴったり重なる…⑤とわかり、問題1と同様にして、△BAGと△IACはぴったり重なる…⑥ことが証明できます。①②より、CAとCDのなす角=90度+90度=180度なので、「CAとCDのなす角が180度ならば、3点A、C、Dがこの順番で一直線上にある」ことから、3点A、C、Dは一直線上にあります。①②より、錯角の位置にある、CAとCBの間の角とBCとBEの間の角が等しいので、「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、3点A、C、Dを通る直線と2点B、Eを通る直線は平行…⑦です。同様にして、3点B、C、Fは一直線上にあり、3点B、C、Fを通る直線と2点A、Gを通る直線は平行…⑧です。「2つの三角形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の頂点が底辺と平行な同一直線上にあるならば、2つの三角形の面積は等しい」ことから、⑦より、△ABEと△CBEの面積は等しい…⑨です。



点Cを通り辺ABと垂直な直線と辺AB、HIとの交点をそれぞれP、Qとおきます。点Pのまわりの4つの角はすべて直角…⑩なので、④⑩と「四角形の内角の和は360度」であることから、QPとQHの間の角=QPとQIの間の角=90度…⑪です。④⑩より、錯角の位置にある、PBとPCの間の角とBPとBHの間の角が等しいので、「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、3点C、P、Qを通る直線と2点B、Hを通る直線は平行…⑫です。同様に考えて、⑩⑪より、3点A、P、Bを通る直線と3点H、Q、Iを通る直線は平行…⑬、④⑩より、3点C、P、Qを通る直線と2点A、Iを通る直線は平行…⑭です。「2つの三角形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の頂点が底辺と平行な同一直線上にあるならば、2つの三角形の面積は等しい」ことから、⑫より、△HBCと△HBPの面積は等しい…⑮です。



⑤⑨⑮より、△CBEと△HBPの面積は等しい…⑯です。⑫⑬より、長方形BHQPは平行四辺形なので、「平行四辺形を対角線で2つの三角形に分けるとその面積は等しい」ことから、△HBPと△PQHの面積は等しい…⑰です。同様に、正方形BCDEも平行四辺形なので、△CBEと△CDEの面積は等しい…⑱です。



⑯⑰⑱より、正方形BCDEの面積=長方形BHQPの面積…⑲です。同様にして、⑥⑧⑬⑭から、正方形ACFGの面積=長方形AIQPの面積…⑳も証明できるので、⑲⑳より、正方形BCDEの面積+正方形ACFGの面積と正方形ABHIの面積が等しいことが証明できました。